

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
Кафедра дискретного анализа

# Дискретная математика

*Методические указания*

*Рекомендовано*  
*Научно-методическим советом университета для студентов,*  
*обучающихся по специальности*  
*Прикладная информатика в экономике*

Ярославль 2011

УДК 004+621  
ББК В 174я73  
Д 48

*Рекомендовано*  
*Редакционно-издательским советом университета*  
*в качестве учебного издания. План 2010/2011 учебного года*

Рецензент  
кафедра дискретного анализа  
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

**Дискретная математика:** методические указания  
Д 48 / сост.: В. Б. Калинин, А. В. Николаев; Яросл. гос. ун-т  
им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 48 с.

Настоящий практикум содержит набор задач по комбинаторике и теории графов, различных по сложности. К более трудным задачам даны указания. Это позволит эффективно использовать различные формы самостоятельной работы и поможет студентам хорошо подготовиться к зачету.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 080801.65 Прикладная информатика в экономике (дисциплина «Дискретная математика», блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 004+621  
ББК В 174я73

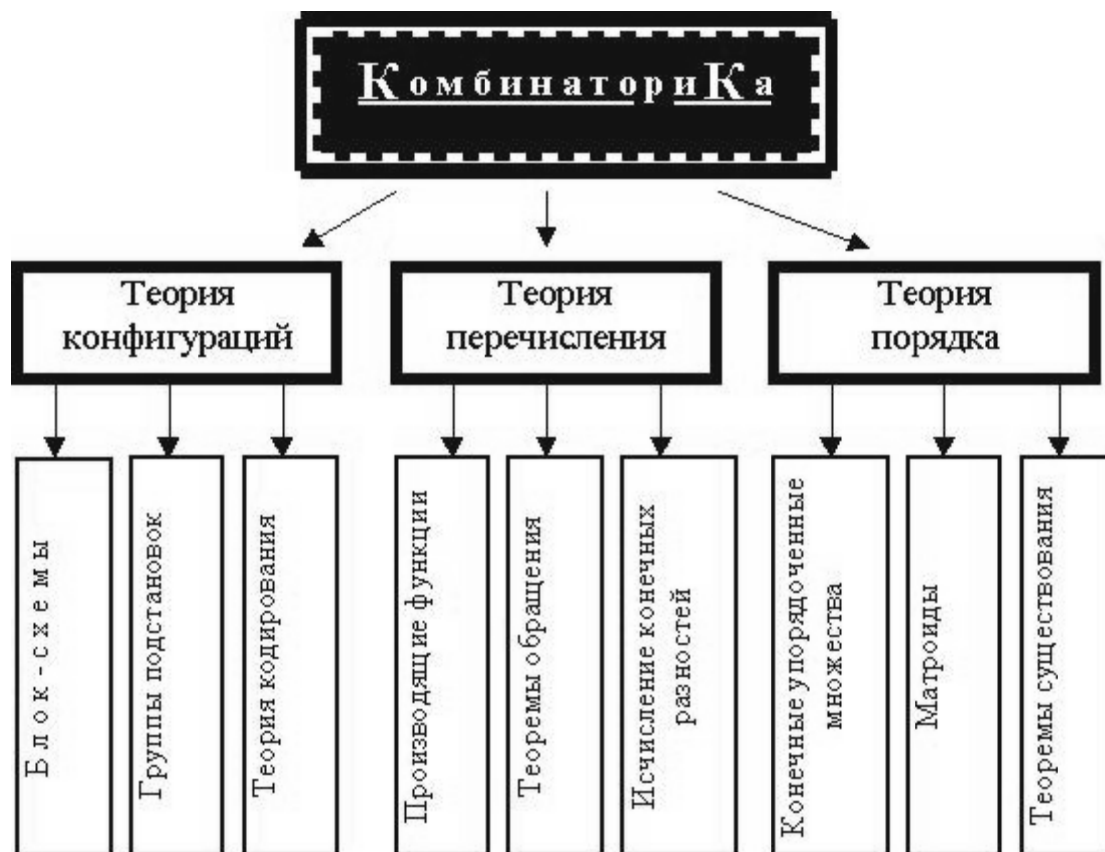
© Ярославский государственный  
университет им. П. Г. Демидова,  
2011

Значительное место в дискретной математике занимает комбинаторика, которая является древнейшей и, возможно, ключевой ветвью математики. Всякому анализу предшествует комбинаторное рассмотрение, всякая серьёзная теория имеет комбинаторный аналог. Комбинаторика располагает столь многообразными методами, решает столь разнообразные задачи, что трудно чётко обозначить её границы. Условно в комбинаторной теории можно выделить следующие три большие части (см. схему):

*Теорию конфигураций*, включающую блок-схемы, группы подстановок, теорию кодирования.

*Теорию перечисления*, содержащую производящие функции, теоремы обращения и исчисление конечных разностей.

*Теорию порядка*, включающую конечные упорядоченные множества и решётки, матрицы и теоремы существования, подобные теоремам Холла и Рамсея.



Следует ещё раз подчеркнуть в высшей степени условный характер представленной схемы. Повсеместно можно наблюдать взаимную связь перечисленных разделов комбинаторики. Например, перечислительная комбинаторика рассматривает задачи, относящиеся и к конфигурациям, и к упорядоченным множествам.

## Теория конфигураций и теория перечисления

Теория конфигураций – традиционный и наиболее разработанный раздел комбинаторики, она рассматривает задачи *выбора* и *расположения* элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Перечислительная комбинаторика основным методом исследования провозгласила метод производящих функций, используя который было доказано громадное число комбинаторных тождеств.

Элементарными комбинаторными конфигурациями являются сочетания, размещения, перестановки. Для подсчёта числа этих конфигураций используются правила суммы и произведения.

**Правило суммы.** Если элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а элемент  $B$  можно выбрать  $k$  способами, то выбор элемента  $A$  или  $B$  можно осуществить  $m + k$  способами. Правило суммы можно перефразировать на теоретико-множественном языке. Обозначим через  $|A|$  число элементов множества  $A$ , через  $A \cup B$  – объединение множеств  $A$  и  $B$ , через  $A \times B$  – декартово произведение множеств  $A$  и  $B$ . Тогда для непересекающихся множеств  $A$  и  $B$  выполняется равенство:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Обобщением правила суммы является правило произведения.

**Правило произведения.** Если элемент  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а после каждого выбора элемента  $A$  элемент  $B$  можно выбрать  $k$  способами, тогда упорядоченную пару элементов  $(A, B)$  можно выбрать  $m \cdot k$  способами.

Правило произведения можно распространить на выбор последовательности  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  произвольной конечной длины  $n$ . На теоретико-множественном языке правило произведения формулируется так:  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ .

**Размещения.**

Назовём множество, содержащее  $n$  элементов,  $n$ -множеством.

Последовательность  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  длины  $k$  без повторяющихся элементов из элементов данного  $n$ -множества назовём  $k$ -размещением.

Обозначим символом  $A_n^k$  число размещений из  $n$  по  $k$  элементов (от фран. «arrangement» – размещение). Используя правило произведения, вычислим число  $A_n^k$ . Пусть произвольное размещение длины  $k$  имеет вид:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Элемент  $x_1$  можно выбрать  $n$  способами. После каждого выбора  $x_1$  элемент  $x_2$  можно выбрать  $(n - 1)$  способами. После каждого выбора элементов  $x_1$  и  $x_2$  элемент  $x_3$  можно выбрать  $(n - 2)$  способами и т. д. После каждого выбора элементов  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$  элемент  $x_k$  можно выбрать  $(n - (k - 1)) = (n - k + 1)$  способами. Тогда, по правилу произведения, последовательность  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  можно выбрать числом способов, равным

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1) = A_n^k \quad (1.1)$$

Произведение в левой части равенства (1.1) умножим и разделим на  $(n - k)!$ , получим:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!} \quad (1.2)$$

Если в формуле (1.2)  $k = n$ , то  $A_n^n$  есть число  $P_n$  перестановок из  $n$  элементов  $P_n = n!$  (от «permutation» – перестановка).

### **Сочетания.**

$k$ -подмножество данного  $n$ -множества называется  $k$ -сочетанием.

Обозначим через  $C_n^k$  число  $k$ -сочетаний из данных  $n$  элементов. Формулу для числа  $C_n^k$  получим, рассуждая следующим образом. Если каждое сочетание упорядочить всеми возможными