

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

ИНСТИТУТ ЭНЕРГЕТИКИ И ТРАНСПОРТА

А.И.ОСИПОВ, Н.Н.ОСИПОВА

# ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Учебное пособие

САМАРА 2005

УДК 510.22(075)

**Функции и графики:** Учеб. пособие / А.И. Осипов, Н.Н. Осипова. Самар.  
гос. аэрокосм. ун-т, Самара, 2005. - 48 с.

**ISBN**

В учебном пособии по математике изложены методические указания и контрольные задания по теме «Функции и графики» для студентов очного и очно-заочного обучения в Институте энергетики и транспорта СГАУ по специальностям 130200 и 061100, содержится систематизированный теоретический материал, разобраны характерные примеры, предложены вопросы и упражнения для самопроверки, снабженные ответами.

Пособие может быть использовано при проведении лекционных, практических и самостоятельных занятий, а задания, вопросы и упражнения – для контроля усвоения материала. При самостоятельном обучении практически не требуются другие пособия, кроме методических указаний «Числовые множества».

Учебное пособие имеет целью всесторонне подготовить студентов к изучению высшей математики, а слушателей курсов – к Единому государственному экзамену; составлено в полном соответствии с программой вступительных экзаменов в университет и способствует приобщению абитуриентов и студентов первого курса к самостоятельной форме учебной работы, крайне актуальной для высших учебных заведений.

Табл. 4. Ил. 26. Библиогр.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензенты:

заведующий кафедрой уравнений  
математической физики  
Самарского государственного  
университета, профессор, доктор  
физико-математических наук  
Пулькина Л.С.

доцент Самарского государственного  
аэрокосмического университета,  
кандидат технических наук  
Л. В. Коломиец

**ISBN**

© Александр Иванович Осипов, Надежда  
Николаевна Осипова, 2005  
© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2005

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>1. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ</b> .....	5
1.1. Функция. Область определения и множество значений функции. Сложная и элементарная функции.....	5
1.2. График и способы задания функции.....	7
1.3. Ограниченная, обратная, монотонная, четная, нечетная и периодическая функции.....	10
<b>2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ</b> .....	12
2.1. Предел функции. Бесконечно большая, малая и ограниченная функции.....	12
2.2. Свойства пределов и их вычисление.....	14
2.3. Непрерывная функция и ее свойства. Односторонние пределы и точки разрыва функции.....	18
<b>3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ</b> .....	21
3.1. Производная, ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к графику функции.....	21
3.2. Дифференцирование суммы, произведения и частного функций. Производная сложной функции.....	23
<b>4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА</b> .....	25
4.1. Признаки возрастания и убывания функции. Необходимое и достаточное условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции.....	25
4.2. Асимптоты графика функции. Полное исследование функции.....	28
4.3. Преобразование графика функции.....	32
<b>5. ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ</b> .....	39
<b>6. ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ</b> .....	44
<b>7. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА</b> .....	46
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	48

В учебном пособии «Функции и графики» рассмотрены следующие вопросы: элементарные функции одной переменной, аналитический метод изучения функций с помощью предела, базовые понятия непрерывности и производной функции. Большое внимание в пособии уделено технике построения графиков функций с параметрами и их исследованию.

В пособии для иллюстрации материала используются только алгебраические функции, широко применяемые при моделировании и аппроксимации в менеджменте, а также представлении функций в виде степенных рядов. Это позволяет, во-первых, не отвлекаться на изучение свойств остальных элементарных функций, а, во-вторых, усваивать изложенные в пособии вопросы еще до знакомства, например, с показательными и логарифмическими функциями и изучать последние после усвоения понятий функции и ее графика как таковых.

Учебное пособие «Функции и графики» является естественным дополнением и промежуточным звеном к методическим указаниям «Введение в анализ» и «Решение задач по дифференциальному исчислению», активно используемым в учебном процессе на первом курсе Института энергетики и транспорта.

Удачным образом работа вписывается и в ряд методических указаний «Числовые множества» и «Применение производной. Тригонометрические функции, тождества и уравнения», а содержащиеся в ней контрольные задания могут быть использованы при организации и проведении очных и заочных подготовительных курсов для поступления в ИЭТ по специальности 061100, требующей углубленного изучения школьного курса математики.

Материал пособия базируется на программе школьной математики и не требует привлечения университетских учебников. Это дает возможность подготовиться к изучению математического анализа самостоятельно еще до поступления в высшее учебное заведение и более уверенно решать задачи из последнего раздела единого государственного экзамена.

Материал изложен в соответствии с терминами и определениями «Математической энциклопедии», соответствует требованиям по подготовке рукописей РИО СГАУ.

# 1. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## 1.1. Функция. Область определения и множество значений функции. Сложная и элементарная функции

Площадь квадрата  $S_{кв.}$  и прямоугольника  $S_{пр.}$  задаются формулами:

$$S_{кв.} = a^2, S_{пр.} = ab,$$

где:  $a, b$  - длины сторон данных фигур.

Из определения 2.6 /1/ многочлен задается выражением:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

где:  $a_0, a_1, \dots, a_n$  - постоянные коэффициенты.

Если во всех этих формулах  $a, b$  и  $x$  будут переменными величинами, то каждому значению этих величин будут соответствовать вполне определенные значения  $S_{кв.}, S_{пр.}, P_n(x)$ . В этом случае говорят, что  $S_{кв.}, S_{пр.}, P_n(x)$  - есть функции,  $a, b, x$  - их аргументы. Причем,  $S_{кв.}$  и  $P_n(x)$  - функции одной переменной, а  $S_{пр.}$  - функция двух переменных.

В данном учебном пособии мы будем рассматривать только функции одной переменной. Дадим точное математическое определение функции одной переменной с помощью символов математической логики и использованием элементов теории множеств /1/.

**Определение 1.1.** Пусть заданы два множества  $X$  и  $Y$  (Рис.1), такие, что любому элементу  $x$  из множества  $X$  ( $\forall x \in X$ ) поставлен в соответствие единственный элемент  $y$  из множества  $Y$  ( $! y \in Y$ ), который обозначен через  $y = f(x)$ . Тогда говорят, что на множестве  $X$  задана функция одной переменной  $y = f(x)$  или в другом обозначении  $f: X \rightarrow Y$ . При этом множество  $X$  называется областью определения функции  $f$ , а  $Y$  - областью или множеством ее значений,  $y$  называется образом элемента  $x$ , а  $x$  - прообразом элемента  $y$ .

Первое обозначение функции  $y = f(x)$  используется в аналитических преобразованиях математических формул, а второе показывает, что между множествами  $X$  и  $Y$  установлено соответствие  $X \rightarrow Y$ , по которому множество  $X$  отображается на множество  $Y$ .

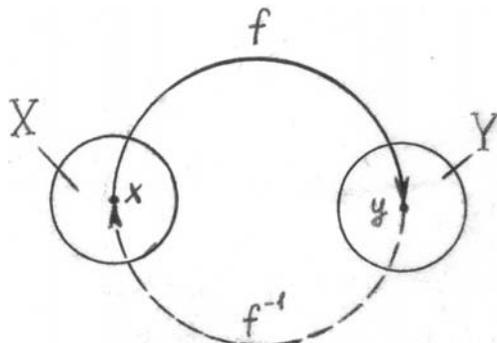


Рис. 1

В дальнейшем мы будем рассматривать только числовые функции одной переменной, заданные на множестве действительных чисел  $R$ .

**Определение 1.2.** Действительной функцией называется  $f: X \rightarrow Y$ , где  $X \subset R, Y \subset R$  ( $X$  и  $Y$  являются подмножествами множества действительных чисел  $R$ ).

**Пример 1.1.** Функции  $y_1 = x^2 = f(x), X = R, Y = R_0 = [0; +\infty]$  и  $y_2 = x^4 = \Phi(x), X = R, Y = R_0$  различны, но устанавливают соответствия между одними и теми же числовыми множествами  $f: R \rightarrow R_0$  и  $\Phi: R \rightarrow R_0$ .

**Пример 1.2.** Числовая последовательность  $\{x_n\}$  устанавливает соответствие между множествами  $N \rightarrow R$ , то есть  $x_n = f(n)$ , где  $n \in N, x_n \in R$ .

Таким образом, по определению 1.1 кроме функциональной зависимости  $f(x)$  необходимо задать и область определения  $X$ , так как функции, имеющие разные области определения, при прочих равных условиях являются различными.

**Пример 1.3.** Найти область определения функции  $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ .

**Решение.**

$$X = \left\{ x \mid \begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \right\} \text{ (обозначение множества дано по определению 1.1)}$$

/1/).

Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 9 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow X = [-3;1) \cup (1;3].$$

**Определение 1.3.** Пусть заданы функции  $y = f(x)$  и  $z = F(y)$ , причем область определения функции  $F$  ( $X_F$ ) содержит область значений функции  $f$  ( $Y_f \subset X_F$ ), тогда  $\forall x \in X_f$  соответствует  $z$ , такое, что  $z = F(y)$ , где  $y = f(x)$ . Эта функция, определенная соответствием  $z = F[f(x)]$ , называется сложной функцией или композицией функций  $f$  и  $F$ .

Например, всякая рациональная функция является композицией четырех арифметических действий, то есть композицией функций  $F + f, F - f, F \cdot f, F / f$  ( $f \neq 0$ ), и может быть представлена в виде отношения:  $y = P_n(x)/P_m(x)$ , где:  $P_n$  и  $P_m$  - многочлены /1/:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

$$P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m \neq 0.$$

Функцию в примере 1.3 можно представить композицией нескольких функций:  $w = v/u, u = x - 1, v = \sqrt{z}, z = 9 - y, y = x^2$ .

**Определение 1.4.** Элементарные функции - это класс функций, состоящих из многочленов, показательных функций, логарифмических функций, тригонометрических функций и получающихся из перечисленных