

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

ИНСТИТУТ ЭНЕРГЕТИКИ И ТРАНСПОРТА

А.И.ОСИПОВ, Н.Н.ОСИПОВА

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Учебное пособие

САМАРА 2005

УДК 510.22(075)

Функции и графики: Учеб. пособие / А.И. Осипов, Н.Н. Осипова. Самар.
гос. аэрокосм. ун-т, Самара, 2005. - 48 с.

ISBN

В учебном пособии по математике изложены методические указания и контрольные задания по теме «Функции и графики» для студентов очного и очно-заочного обучения в Институте энергетики и транспорта СГАУ по специальностям 130200 и 061100, содержится систематизированный теоретический материал, разобраны характерные примеры, предложены вопросы и упражнения для самопроверки, снабженные ответами.

Пособие может быть использовано при проведении лекционных, практических и самостоятельных занятий, а задания, вопросы и упражнения – для контроля усвоения материала. При самостоятельном обучении практически не требуются другие пособия, кроме методических указаний «Числовые множества».

Учебное пособие имеет целью всесторонне подготовить студентов к изучению высшей математики, а слушателей курсов – к Единому государственному экзамену; составлено в полном соответствии с программой вступительных экзаменов в университет и способствует приобщению абитуриентов и студентов первого курса к самостоятельной форме учебной работы, крайне актуальной для высших учебных заведений.

Табл. 4. Ил. 26. Библиогр.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензенты:

заведующий кафедрой уравнений
математической физики
Самарского государственного
университета, профессор, доктор
физико-математических наук
Пулькина Л.С.

доцент Самарского государственного
аэрокосмического университета,
кандидат технических наук
Л. В. Коломиец

ISBN

© Александр Иванович Осипов, Надежда
Николаевна Осипова, 2005
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2005

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 4 |
| 1. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ | 5 |
| 1.1. Функция. Область определения и множество значений функции. Сложная и элементарная функции..... | 5 |
| 1.2. График и способы задания функции..... | 7 |
| 1.3. Ограниченная, обратная, монотонная, четная, нечетная и периодическая функции..... | 10 |
| 2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ | 12 |
| 2.1. Предел функции. Бесконечно большая, малая и ограниченная функции..... | 12 |
| 2.2. Свойства пределов и их вычисление..... | 14 |
| 2.3. Непрерывная функция и ее свойства. Односторонние пределы и точки разрыва функции..... | 18 |
| 3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ | 21 |
| 3.1. Производная, ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к графику функции..... | 21 |
| 3.2. Дифференцирование суммы, произведения и частного функций. Производная сложной функции..... | 23 |
| 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА | 25 |
| 4.1. Признаки возрастания и убывания функции. Необходимое и достаточное условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции..... | 25 |
| 4.2. Асимптоты графика функции. Полное исследование функции..... | 28 |
| 4.3. Преобразование графика функции..... | 32 |
| 5. ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ | 39 |
| 6. ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ | 44 |
| 7. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА | 46 |
| СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ | 48 |

В учебном пособии «Функции и графики» рассмотрены следующие вопросы: элементарные функции одной переменной, аналитический метод изучения функций с помощью предела, базовые понятия непрерывности и производной функции. Большое внимание в пособии уделено технике построения графиков функций с параметрами и их исследованию.

В пособии для иллюстрации материала используются только алгебраические функции, широко применяемые при моделировании и аппроксимации в менеджменте, а также представления функций в виде степенных рядов. Это позволяет, во-первых, не отвлекаться на изучение свойств остальных элементарных функций, а, во-вторых, усваивать изложенные в пособии вопросы еще до знакомства, например, с показательными и логарифмическими функциями и изучать последние после усвоения понятий функции и ее графика как таковых.

Учебное пособие «Функции и графики» является естественным дополнением и промежуточным звеном к методическим указаниям «Введение в анализ» и «Решение задач по дифференциальному исчислению», активно используемым в учебном процессе на первом курсе Института энергетики и транспорта.

Удачным образом работа вписывается и в ряд методических указаний «Числовые множества» и «Применение производной. Тригонометрические функции, тождества и уравнения», а содержащиеся в ней контрольные задания могут быть использованы при организации и проведении очных и заочных подготовительных курсов для поступления в ИЭТ по специальности 061100, требующей углубленного изучения школьного курса математики.

Материал пособия базируется на программе школьной математики и не требует привлечения университетских учебников. Это дает возможность подготовиться к изучению математического анализа самостоятельно еще до поступления в высшее учебное заведение и более уверенно решать задачи из последнего раздела единого государственного экзамена.

Материал изложен в соответствии с терминами и определениями «Математической энциклопедии», соответствует требованиям по подготовке рукописей РИО СГАУ.

1. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Функция. Область определения и множество значений функции. Сложная и элементарная функции

Площадь квадрата $S_{кв.}$ и прямоугольника $S_{пр.}$ задаются формулами:

$$S_{кв.} = a^2, S_{пр.} = ab,$$

где: a, b - длины сторон данных фигур.

Из определения 2.6 /1/ многочлен задается выражением:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

где: a_0, a_1, \dots, a_n - постоянные коэффициенты.

Если во всех этих формулах a, b и x будут переменными величинами, то каждому значению этих величин будут соответствовать вполне определенные значения $S_{кв.}, S_{пр.}, P_n(x)$. В этом случае говорят, что $S_{кв.}, S_{пр.}, P_n(x)$ - есть функции, a, b, x - их аргументы. Причем, $S_{кв.}$ и $P_n(x)$ - функции одной переменной, а $S_{пр.}$ - функция двух переменных.

В данном учебном пособии мы будем рассматривать только функции одной переменной. Дадим точное математическое определение функции одной переменной с помощью символов математической логики и использованием элементов теории множеств /1/.

Определение 1.1. Пусть заданы два множества X и Y (Рис.1), такие, что любому элементу x из множества X ($\forall x \in X$) поставлен в соответствие единственный элемент y из множества Y ($! y \in Y$), который обозначен через $y = f(x)$. Тогда говорят, что на множестве X задана функция одной переменной $y = f(x)$ или в другом обозначении $f: X \rightarrow Y$. При этом множество X называется областью определения функции f , а Y - областью или множеством ее значений, y называется образом элемента x , а x - прообразом элемента y .

Первое обозначение функции $y = f(x)$ используется в аналитических преобразованиях математических формул, а второе показывает, что между множествами X и Y установлено соответствие $X \rightarrow Y$, по которому множество X отображается на множество Y .

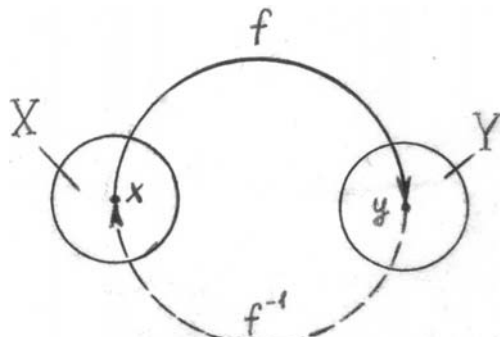


Рис. 1

В дальнейшем мы будем рассматривать только числовые функции одной переменной, заданные на множестве действительных чисел R .

Определение 1.2. Действительной функцией называется $f: X \rightarrow Y$, где $X \subset R, Y \subset R$ (X и Y являются подмножествами множества действительных чисел R).

Пример 1.1. Функции $y_1 = x^2 = f(x), X = R, Y = R_0 = [0; +\infty]$ и $y_2 = x^4 = \Phi(x), X = R, Y = R_0$ различны, но устанавливают соответствия между одними и теми же числовыми множествами $f: R \rightarrow R_0$ и $\Phi: R \rightarrow R_0$.

Пример 1.2. Числовая последовательность $\{x_n\}$ устанавливает соответствие между множествами $N \rightarrow R$, то есть $x_n = f(n)$, где $n \in N, x_n \in R$.

Таким образом, по определению 1.1 кроме функциональной зависимости $f(x)$ необходимо задать и область определения X , так как функции, имеющие разные области определения, при прочих равных условиях являются различными.

Пример 1.3. Найти область определения функции $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$.

Решение.

$$X = \left\{ x \mid \begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \right\} \text{ (обозначение множества дано по определению 1.1)}$$

/1/).

Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 9 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow X = [-3; 1) \cup (1; 3].$$

Определение 1.3. Пусть заданы функции $y = f(x)$ и $z = F(y)$, причем область определения функции F (X_F) содержит область значений функции f ($Y_f \subset X_F$), тогда $\forall x \in X_f$ соответствует z , такое, что $z = F(y)$, где $y = f(x)$. Эта функция, определенная соответствием $z = F[f(x)]$, называется сложной функцией или композицией функций f и F .

Например, всякая рациональная функция является композицией четырех арифметических действий, то есть композицией функций $F + f, F - f, F \cdot f, F / f$ ($f \neq 0$), и может быть представлена в виде отношения: $y = P_n(x)/P_m(x)$, где: P_n и P_m - многочлены /1/:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

$$P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m \neq 0.$$

Функцию в примере 1.3 можно представить композицией нескольких функций: $w = v/u, u = x - 1, v = \sqrt{z}, z = 9 - y, y = x^2$.

Определение 1.4. Элементарные функции - это класс функций, состоящих из многочленов, показательных функций, логарифмических функций, тригонометрических функций и получающихся из перечисленных