



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

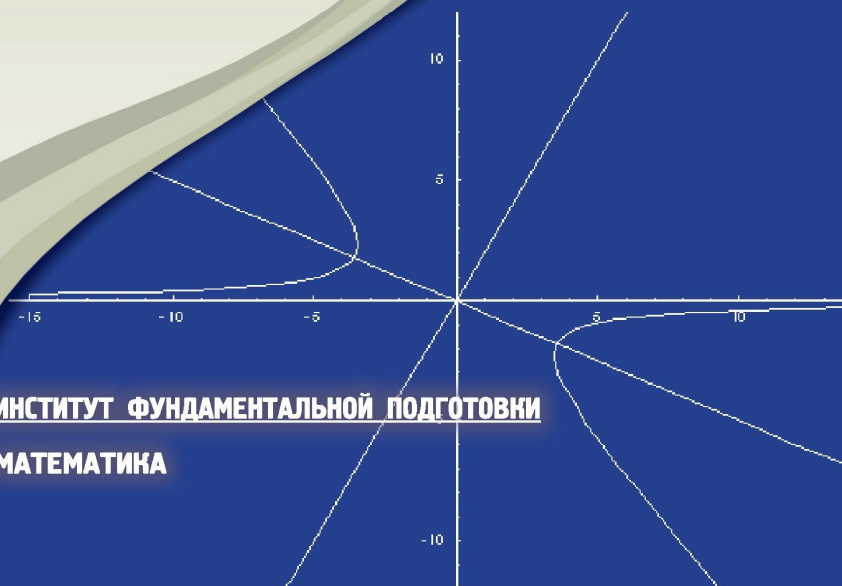
А. Н. Остыловский

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное
пособие

УМО

ИНСТИТУТ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ
МАТЕМАТИКА



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. Н. Остыловский

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Допущено Учебно-методическим объединением по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки высшего профессионального образования 010100 Математика, 30.06.2010

Красноярск
СФУ
2011

УДК 514.12(07)
ББК 22.151.54я73
О-79

Рецензенты:

О. В. Капцов, д-р физ.-мат. наук, проф. ведущий науч. сотр. Института вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск);

Н. В. Волков, д-р физ.-мат. наук, проф. зам. директора по науке Института физики им. Л. В. Киренского СО РАН (г. Красноярск)

Остыловский, А. Н.

О-79 Аналитическая геометрия : учеб. пособие / А. Н. Остыловский. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2011. – 92 с.
ISBN 978-5-7638-2196-3

Изложены основные теоретические положения раздела «Аналитическая геометрия» курса «Математика». Особое внимание уделено инвариантной теории, векторным тождествам и уравнениям. Рассмотрены также произвольный базис, матрица Грама, структурный тензор векторного произведения.

Предназначено для студентов направления подготовки 010100 Математика, а также для студентов инженерно-физических направлений и специальностей.

УДК 514.12(07)
ББК 22.151.54я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 010100 — «Математика», а также может быть полезно студентам, обучающимся по направлениям и специальностям «Прикладная математика и информатика», «Механика».

Цель пособия — помочь студентам освоить трудные разделы курса «Аналитическая геометрия». При изложении автор опирался на личный опыт многолетнего преподавания аналитической геометрии на физическом факультете Красноярского государственного университета. Для физиков важно уметь оперировать векторами не только в координатной, но и в инвариантной (бескоординатной) форме, что отражает идею изотропности пространства. В данном пособии курс «Аналитическая геометрия» излагается как в инвариантной, так и в координатной формах. Следует отметить, что в имеющейся учебной литературе по данному курсу, как правило, вопросы инвариантной теории освещены недостаточно для понимания основ теоретической физики. В предлагаемом пособии все утверждения векторной алгебры сначала выводятся в инвариантной форме, а затем переводятся на координатный язык. Уравнения плоскостей и прямых в пространстве также выводятся вначале в компактной инвариантной форме. Такой подход, на наш взгляд, позволяет лучше понять суть предмета, тем более, что в координатной форме многие результаты очень громоздки. Инвариантные выражения (даже в неортонормированном базисе) всегда можно перевести на координатный язык. Обратный переход не всегда возможен, а если и возможен, то может оказаться весьма затруднительным.

Пособие состоит из четырёх глав. В главе 1 в полном объёме изложен аппарат векторной алгебры в инвариантной форме. В главе 2 утверждения, доказанные в главе 1, представлены в координатной форме. Кроме того, в данной главе вводится тензорный язык немого суммирования, используемый для изложения векторной теории в произвольном (необязательно ортонормированном) базисе. В главах 3, 4 выводятся векторные (инвариантные) уравнения прямых и плоскостей, а также рассматриваются решения задач о взаимном расположении прямых и плоскостей.

В пособии приведено большое количество примеров и упражнений, что поможет студентам успешно освоить названный курс и на теоретическом, и на прикладном уровне.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----------|
| Предисловие | 3 |
| 1. Векторы. Инвариантная теория | 4 |
| 1.1. Скалярные и векторные величины | 4 |
| 1.2. Формализация: свободные геометрические векторы | 5 |
| 1.3. Линейные операции. Орт вектора | 6 |
| 1.4. Коллинеарность, компланарность, линейная зависимость векторов | 9 |
| 1.5. Матрицы и определители. Простейшие свойства | 16 |
| 1.6. Скалярное произведение | 21 |
| 1.7. Векторное произведение | 27 |
| 1.7.1. Момент силы | 27 |
| 1.7.2. Ориентация тройки векторов | 28 |
| 1.7.3. Векторное произведение | 28 |
| 1.7.4. Геометрические свойства векторного произведения | 28 |
| 1.7.5. Алгебраические свойства векторного произведения | 29 |
| 1.8. Смешанное произведение | 32 |
| 1.9. Двойное векторное произведение | 32 |
| 1.10. Решение векторных уравнений | 36 |
| Упражнения | 41 |
| 2. Векторы в координатах..... | 45 |
| 2.1. Базис и координаты | 45 |
| 2.2. Координатные столбцы векторов | 46 |
| 2.3. Ортонормированный базис | 47 |
| 2.4. Произвольный базис | 51 |
| 2.4.1. Тензорные обозначения | 51 |
| 2.4.2. Матрица Грама и скалярное произведение | 51 |
| 2.4.3. Векторное произведение | 52 |
| 2.4.4. Смешанное произведение | 54 |
| 2.5. Замена базиса | 54 |
| 2.6. Замена ортонормированного базиса на ортонормированный | 56 |
| 2.7. Взаимный базис | 57 |
| 2.7.1. Определение и построение взаимного базиса | 57 |
| 2.7.2. Ковариантные и контравариантные координаты вектора | 58 |
| 2.7.3. Связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора | 60 |
| 2.7.4. Физические компоненты вектора | 61 |

| | |
|---|-----------|
| 2.7.5. Замена базиса..... | 62 |
| 2.7.6. О размерностях векторных величин | 63 |
| Упражнения | 63 |
| 3. Плоскость в пространстве | 66 |
| 3.1. Общая и прямоугольная декартовы системы координат..... | 66 |
| 3.2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору | 67 |
| 3.3. Линейное уравнение | 69 |
| 3.4. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум неколлинеарным векторам | 70 |
| 3.5. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой | 71 |
| 3.6. Расположение плоскости относительно прямоугольной системы координат | 71 |
| 3.7. Расстояние от точки до плоскости | 72 |
| 4. Прямая в пространстве..... | 74 |
| 4.1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данному вектору..... | 74 |
| 4.2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки..... | 75 |
| 4.3. Прямая как пересечение двух плоскостей | 75 |
| 4.4. Расстояние от точки до прямой..... | 76 |
| 4.5. Расстояние между непараллельными прямыми | 76 |
| 4.6. Некоторые задачи на построение..... | 77 |
| Упражнения..... | 81 |
| Ответы к упражнениям | 85 |
| Библиографический список..... | 87 |