

В.И. ТИХОНОВ  
Б.И. ШАХТАРИН  
В.В. СИЗЫХ

# СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

## Примеры и задачи

2-е издание

Том 5  
Оценка сигналов,  
их параметров  
и спектров  
Основы теории  
информации

Москва  
Горячая линия - Телеком  
2012

УДК 621.37+621.391

ББК 32.841

Т46

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор Н. Н. Удалов;  
доктор физ.-мат. наук, профессор А. И. Козлов

**Тихонов В. И., Шахтарин Б. И., Сизых В. В.**

**Т46** Случайные процессы. Примеры и задачи. Том 5 – Оценка сигналов, их параметров и спектров. Основы теории информации: Учебное пособие для вузов. – 2 изд., стереотип. – М.: Горячая линия–Телеком, 2012. – 400 с.: ил.

**ISBN 978-5-9912-0102-5.**

В пятом томе задачника в первой части представлены задачи по оценке сигналов, их параметров и энергетических спектров. Рассмотрены задачи на вычисление границ Рао–Крамера для дисперсии оценок, на определение оценок методами максимального правдоподобия и байесовских критериев, а также задачи на оценивание случайных сигналов фильтрами Винера и Калмана, приведены примеры приложения теории нелинейного оценивания (метод Стратоновича) и задачи на оценивание спектра. Во второй части пособия даны задачи на вычисление энтропии распределений, а также задачи по кодированию и по оценке помехоустойчивости систем передачи сообщений.

Для студентов вузов радиотехнических и инфокоммуникационных специальностей.

**ББК 32.841**

Адрес издательства в Интернет [WWW.TECHBOOK.RU](http://WWW.TECHBOOK.RU)

Учебное издание

**Тихонов Василий Иванович, Шахтарин Борис Ильич,  
Сизых Вадим Витальевич**

**Случайные процессы. Примеры и задачи.  
Том 5 – Оценка сигналов, их параметров и спектров.  
Основы теории информации**

Учебное пособие для вузов

Компьютерная верстка Ю. Н. Чернышова  
Обложка художника В. Г. Ситникова

Подписано в печать 20.01.12. Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 27,75. Тираж 500 экз. (1 завод. – 100 экз.)

**ISBN 978-5-9912-0102-5**

© В. И. Тихонов, Б. И. Шахтарин,  
В. В. Сизых, 2009, 2012

© Издательство Горячая линия–Телеком, 2012

## Предисловие

Данный пятый том задачника, задуманный еще при жизни Василия Ивановича Тихонова и основанный в значительной степени на его идеях, выходит уже после ухода из жизни этого замечательного ученого и педагога. Мы постарались учесть все предложения и замечания нашего соавтора. Надеемся, что это нам в значительной степени удалось. В данном томе задачника собрано практически большинство тем, имеющих отношение к оценке сигналов, их параметров и энергетическому спектру. Нам остается пожелать, чтобы наш труд не пропадет даром, а принесет определенную пользу студентам, аспирантам и специалистам, заинтересованным в решении представленных задач.

С выходом данного тома задачника авторы завершают издание всего многотомника под общим названием «Случайные процессы. Примеры и задачи»:

Т. 1. Случайные величины и процессы. — М.: Радио и связь, 2003. — 399 с.

Т. 2. Линейные и нелинейные преобразования. — М.: Радио и связь, 2004. — 399 с.

Т. 3. Оптимальная фильтрация, экстраполяция и моделирование. — М.: Радио и связь, 2004. — 407 с.

Т. 4. Оптимальное обнаружение сигналов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. — 367 с.

Т. 5. Оценка сигналов, их параметров и энергетических спектров. Основы теории информации. — М.: Горячая линия–Телеком, 2009. — 400 с.

*Б.И. Шахтарин  
В.В. Сизых*

## Введение

В данной книге рассмотрены основные вопросы, связанные с оценкой сигналов, их параметров и спектров, а также задачи по основам теории информации (энтропия, кодирование, передача информации).

Книга содержит две части. В первой части (главы 1–8) представлены примеры и задачи по оценке сигналов и их параметров, включая спектральное оценивание. В первой главе рассмотрено вычисление границы Рао–Крамера (ГРК), приводятся теоремы как для скалярного, так и для векторного параметров и соответствующие примеры и задачи. Во второй главе представлен наиболее популярный метод оценки параметров — метод максимального правдоподобия (ММП). Приводятся способы вычисления ММП-оценок дальности до цели, угла пеленга, а также ММП-оценок параметров сигнала (амплитуды, фазы, частоты). В третьей главе рассматриваются байесовские оценки. Анализируются различные функции потерь и априорные распределения. В четвертой главе приводятся задачи на оценку параметров методом наименьших квадратов (МНК).

В главах 5, 6, 7 рассматриваются линейные, а также нелинейные методы оценки сигналов. В главе 5 — оценки фильтрами Винера (ФВ), в главе 6 — фильтрами Калмана (ФК), в главе 7 — нелинейными фильтрами Стратоновича (ФС). В главе 8 приводятся сведения и задачи по спектральному оцениванию, представлены декомпозиционные методы такие, как метод минимума нормы (ММН), метод Писаренко, метод классификации множества сигналов (КМС, или MUSIC), метод ESPRIT.

Во второй части книги рассмотрены примеры и задачи по основам теории информации. В главе 9 — представлены задачи по вычислению энтропии (в приложении 2 материалы главы дополнены методом максимальной энтропии и его приложению к оценке спектра в версиях Берга и Акаике). В главе 10 даны задачи по кодированию, в главах 11 и 12 — задачи по помехоустойчивости передачи дискретных и непрерывных сигналов.

В приложениях (П1–10) рассмотрены вспомогательные материалы, призванные дополнить теоретические сведения, изложенные в основных главах книги.

В приложениях изложены метод Лагранжа (П1), метод максимальной энтропии (ММЭ) (П2), доказательства ГРК для скалярного (П3) и векторного (П4) параметров. Приводится вывод соотношений для нерекурсивного цифрового фильтра Винера (ЦФВ) (П5), даны основы декомпозиционных методов спектрального оценивания (П6), приводятся формулы дифференцирования векторов и матриц (П7), изложена альтернативная версия ESPRIT (П8), а также программа алгоритма Акаике (П9). В приложении 10 рассмотрены основы построения систем с ортогональным частотным уплотнением сигналов.

Таким образом, в целом материал книги дает основные сведения по рассматриваемым выше вопросам и создает предпосылки для обучения студентов и специалистов в областях, затронутых в этой книге.

## Список сокращений

АГБШ — аддитивный гауссовский белый шум	ПРВ — плотность распределения вероятностей
АПРВ — апостериорная ПРВ	ПСП — псевдослучайная последовательность
АР — антенная решетка	ПФ — преобразование Фурье
БПФ — быстрое преобразование Фурье	РУ — разностное уравнение
БШ — белый шум	РФК — расширенный ФК
ВКФ — взаимная КФ	РФС — расширенный фильтр Стратоновича
ГБШ — гауссовский БШ	СКО — средний квадрат ошибки
ГРК — граница Рао–Крамера	СП — случайный процесс
ДПФ — дискретное преобразование Фурье	СПМ — спектральная плотность мощности
ДУ — дифференциальное уравнение	ССЗ — система слежения за задержкой
ЗИ — защитный интервал	СФ — согласованный фильтр
ИЦ — интегрирующая цепь	ФАП — фазовая автоподстройка
ИХ — импульсная характеристика	ФВ — фильтр Винера
КВМ — ковариационная матрица	ФД — фазовый детектор
КВФ — ковариационная функция	ФК — фильтр Калмана
КМС — классификация множественных сигналов	ФНЧ — фильтр низкий частот
КФ — корреляционная функция	ФС — фильтр Стратоновича
ЛС — линейная система	ФФ — формирующий фильтр
ММП — метод максимального правдоподобия	ЦАП — цифро-аналоговый преобразователь
МНК — метод наименьших квадратов	ЦСФ — цифровой согласованный фильтр
МСИ — межсимвольная интерференция	ЦФВ — цифровой фильтр Винера
ОБПФ — обратное быстрое преобразование Фурье	ЦФК — цифровой фильтр Калмана
ОДПФ — обратное дискретное преобразование Фурье	ЦРФК — цифровой расширенный фильтр Калмана
ОНП — обнаружитель Неймана–Пирсона	ЧХ — частотная характеристика
ОП — отношение правдоподобия	ЭС — энергетический спектр
ОСШ — отношение сигнал/шум	
ПИФ — пропорционально-интегрирующий фильтр	

# ЧАСТЬ I

## Оценка сигналов, их параметров и спектров

### Г л а в а 1

#### Граница Рао-Крамера

##### Теоретические сведения

**Теорема 1.1.** Граница Рао-Крамера (ГРК) при скалярном параметре  $\theta$  [1–5].

Пусть ПРВ  $W(x, \theta)$  удовлетворяют условию (регулярности) [3]

$$E \left[ \frac{\partial \ln W(x, \theta)}{\partial \theta} \right] = 0 \quad \text{при любом } \theta. \quad (1.1)$$

Тогда дисперсия  $D(\hat{\theta})$  любой несмещенной оценки  $\hat{\theta}$  удовлетворяет неравенству

$$D(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{-E \left[ \frac{\partial^2 \ln W(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right]}, \quad (1.2)$$

где производные вычисляются по истинному значению  $\theta$ .

Более того, граница несмещенной оценки  $\hat{\theta}$  достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \ln W(x, \theta)}{\partial \theta^2} = I(\theta)[g(x) - \theta], \quad (1.3)$$

при некоторых функциях  $I$  и  $g$ .

Если оценка принадлежит к классу оценок с минимальной дисперсией, то  $\hat{\theta} = g(x)$ , а минимальная дисперсия равна  $1/I(\theta)$ .

**Замечание.** В соотношении (1.2)

$$E \left[ \frac{\partial^2 \ln W(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right] = \int \frac{\partial^2 \ln W(x, \theta)}{\partial \theta^2} W(x, \theta) dx. \quad (1.4)$$

# Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	3
<b>Введение</b> .....	4
Список сокращений.....	5
<b>Часть I. Оценка сигналов, их параметров и спектров</b>	
<i>Глава 1.</i> Граница Рао–Крамера.....	6
Теоретические сведения.....	6
Примеры.....	14
Задачи.....	32
<i>Глава 2.</i> Метод максимального правдоподобия.....	36
Теоретические сведения.....	36
Примеры.....	46
Задачи и ответы.....	64
<i>Глава 3.</i> Байесовские оценки.....	72
Теоретические сведения.....	72
Примеры.....	79
Задачи.....	88
<i>Глава 4.</i> Метод наименьших квадратов.....	92
Теоретические сведения.....	92
Примеры.....	101
Задачи.....	111
<i>Глава 5.</i> Оценка сигналов фильтрами Винера.....	114
Теоретические сведения.....	114
Примеры.....	119
Задачи.....	130
<i>Глава 6.</i> Оценка сигналов фильтрами Калмана.....	134
Теоретические сведения.....	134
Примеры.....	138
Задачи.....	164
<i>Глава 7.</i> Нелинейные методы оценки сигналов.....	168
Теоретические сведения.....	168
Примеры.....	173
Задачи.....	206
<i>Глава 8.</i> Спектральное оценивание случайных сигналов.....	214
Теоретические сведения.....	214

Примеры .....	231
Задачи .....	240
<b>Часть II. Энтропия и информация</b>	
<i>Глава 9.</i> Энтропия .....	247
Теоретические сведения .....	247
Примеры .....	257
Задачи .....	275
<i>Глава 10.</i> Основы теории информации и кодирования .....	282
Теоретические сведения .....	282
Примеры .....	289
Задачи .....	295
<i>Глава 11.</i> Дискретные системы передачи информации .....	301
Теоретические сведения .....	301
Примеры .....	307
Задачи и ответы .....	315
<i>Глава 12.</i> Непрерывные системы передачи информации .....	326
Теоретические сведения .....	326
Примеры .....	327
Задачи и ответы .....	331
<b>Приложения</b> .....	334
1. Задача на условный экстремум (метод множителей Лагранжа) .....	334
2. Метод максимума энтропии .....	338
3. Граница Рио–Крамера при скалярном параметре .....	356
4. Вывод ГПК при векторном параметре .....	359
5. Нерекурсивный (трансверсальный) цифровой фильтр Винера .....	361
6. Основы декомпозиционных методов спектрального оценивания .....	364
7. Операции дифференцирования .....	368
8. Модели ESPRIT .....	371
9. Программа расчета спектра по алгоритму Акаике .....	375
10. Системы с ортогональным частотным уплотнением сигналов .....	378
Литература .....	390