

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого»
Факультет математики, физики и информатики

ВСЕРОССИЙСКИЕ СТУДЕНЧЕСКИЕ ТУРНИРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ

Тула, 2002–2015 гг.

В 2 частях

Часть I

**СБОРНИК ЗАДАЧ
И ДРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ**

Учебно-методическое пособие

Под редакцией В. А. Шулопова

Тула
Издательство ТГПУ им. Л. Н. Толстого
2016

ББК 22.1я73
В85

Рецензенты:

доктор педагогических наук, профессор *А. Р. Есаян*;
(Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого);
кандидат физико-математических наук,
доцент *Н. В. Белецкая*;
(Московский технологический университет (МИРЭА))

Авторы-составители:

кандидат физико-математических наук, доцент *Ю. А. Игнатов*
(ТГПУ им. Л. Н. Толстого);
кандидат физико-математических наук, доцент *В. А. Шулюпов*
(ТГПУ им. Л. Н. Толстого);
кандидат физико-математических наук, доцент *И. Ю. Реброва*
(ТГПУ им. Л. Н. Толстого);
кандидат физико-математических наук, профессор *А. Е. Устьян*
(ТГПУ им. Л. Н. Толстого);
кандидат педагогических наук, доцент *А. Ю. Эвнин*
(Южно-Уральский государственный университет)

Всероссийские студенческие турниры математических боёв. Тула, 2002–2015 гг.: Учеб.-метод. пособие: В 2 ч. / Авт.-сост. Ю. А. Игнатов, В. А. Шулюпов, И. Ю. Реброва и др.; Под ред. В. А. Шулюпова.— Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016.— Ч. I. Сборник задач и другие материалы.— 144 с.

ISBN 978-5-9908300-0-4

Учебно-методическое пособие предназначается студентам и преподавателям вузов для оказания помощи в подготовке к будущим олимпиадам, математическим боям и другим математическим соревнованиям. Основной частью пособия является сборник задач с решениями, включающий в себя все 440 задач, предлагавшихся на семи всероссийских студенческих турнирах математических боёв, проходивших в Туле в 2002–2015 годах. Задачи систематизированы по тематическому признаку. Кроме того, приводятся правила проведения математических боёв в Туле, регламент турниров математических боёв, результаты всех турниров, включая результаты всех математических боёв.

ББК 22.1я73

ISBN 978-5-9908300-0-4

© Авторы-составители: Ю. А. Игнатов, В. А. Шулюпов,
И. Ю. Реброва, А. Е. Устьян, А. Ю. Эвнин, 2016
© ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математический бой является второй по популярности формой проведения математических соревнований после классических олимпиад. Математический бой совмещает в себе математику, спортивную игру, театральное действие, формирует математическое мышление, а также в отличие от олимпиад способствует развитию умения коллективного решения задач, особенно ценного в современной науке, когда зачастую одна глобальная задача решается большим коллективом научных сотрудников. В математическом бою предлагаются задачи олимпиадного, а также исследовательского характера. Математический бой был изобретён в середине 60-х годов учителем математики школы № 30 г. Ленинграда И. Я. Веребейчиком, был и остаётся особенно популярным в Ленинграде (Санкт-Петербурге), Москве, в различных физико-математических школах и ведущих вузах СССР, России, Украины, в других государствах бывшего Советского Союза. Правила математического боя изложены в журнале «Квант» № 10 за 1972 год, в журнале «Математика в школе» № 4 за 1990 год, в книге 1994 года «Ленинградские математические бои» [2]. С осени 1997 года в память о великом математике и замечательном педагоге Андрее Николаевиче Колмогорове ежегодно проводятся математические турниры для старшеклассников. Эти турниры традиционно собирают самых сильных участников и по праву признаны неофициальным командным первенством России по математике среди школьников.

Проходящие в г. Туле с 1983 года математические бои проводятся по правилам, значительно отличающимся от ленинградских. В этих соревнованиях участвовали студенты ТГПИ (ныне – ТГПУ), школьники многих школ города, участники летних математических школ, летних многопрофильных школ.

С 2002 года в Туле проводятся всероссийские студенческие турниры математических боёв, всего было проведено 7 турниров (кроме них, ещё 2 (III и IV) были проведены в Екате-

ринбурге. В этих турнирах участвовали 33 команды, представляющие 26 вузов из 18 городов России.

Многие участники турниров оставили заметный след в математике.

Андрей Бадзян (в 2002 г., будучи 9-классником, выступал за команду ЮУрГУ) трижды побеждал на международных математических олимпиадах, ныне работает в Лондоне финансовым аналитиком.

Михаил Патракеев (УрГУ, 2002 г.) придумал, как разрезать равносторонний треугольник на 5 одинаковых частей («Квант» № 1 за 2016 г.).

Михаил Игнатьев (СамГУ) опубликовал огромную обзорную статью в ежегоднике «Математическое просвещение».

Наталья Бондаренко (СарГУ, 2007 г.) достигла серьёзных успехов в олимпиадах по программированию. За год в аспирантуре написала диссертацию, кандидат физико-математических наук, в 2015 г. являлась руководителем команды Саратовского университета.

Андрей Плющенко и Евгения Смирнова (УрГУ) также прошли путь от участника до руководителя; кандидаты физико-математических наук.

Александр Бескодаров (МПГУ, 2007 г.) стал известным в Москве репетитором.

Кроме турниров, проводятся соревнования среди команд школ г. Тулы и Тульской области. В 1997–2002 годах проводились игры математической лиги школ города Тулы [1, 7], а с 2013 года проходят математические бои школ Тульской области [8–10]. В этих турнирах участвуют команды, представляющие несколько десятков школ Тулы и области.

Организатором мероприятия является факультет математики, физики и информатики (ранее – факультет математики и информатики) ТГПУ им. Л. Н. Толстого (декан факультета – до 2010 г. А. Е. Устьян, с 2010 г. – И. Ю. Реброва – осуществляют руководство турниром). Подбором и составлением задач руководит доцент ка-

федры АМАГ Ю. А. Игнатов, турнирными вопросами, ведением сайта турниров занимается доцент кафедры АМАГ В. А. Шулюпов, в жюри математических боёв входят преподаватели факультета, руководители команд-участниц.

Основной частью данного пособия является сборник задач с решениями, включающий в себя 440 задач, предлагавшихся во всех семи всероссийских студенческих турнирах математических боёв, состоявшихся в Туле. Многие задачи не являются новыми, они взяты из разных сборников, включались в различные олимпиады и другие математические соревнования. Вместе с тем основная их часть малоизвестна, условия некоторых изменены. Задачи систематизированы по тематическому признаку. При разбиении на разделы учтён опыт известных задачников [5–6], хотя авторы понимают, что включение задачи в тот или иной раздел часто носит весьма условный характер, как и само разделение задачного материала на разделы.

Также приводятся правила проведения математических боёв в г. Туле, регламент турнира (правила), его результаты.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначается студентам и преподавателям вузов для подготовки к математическим олимпиадам, математическим боям и другим математическим соревнованиям. В связи с тем, что значительная часть задач, предлагавшаяся на турнирах, посвящена различным вопросам элементарной математики, пособие может быть полезно ученикам старших классов средних школ и учителям.

Авторский коллектив будет признателен всем, кто сообщит свои замечания и пожелания, касающиеся настоящего сборника, по адресу: 300026, Тула, просп. Ленина, 125, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, факультет математики, физики и информатики, тел. (4872)-65-78-29.

Пособие издаётся в двух частях.

В первую часть включены 275 задач, относящихся к математическому анализу, алгебре, теории чисел, комбинаторики, теории вероятностей и планиметрии, а также решения, указания и ответы к ним.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	1
ЗАДАЧИ.....	6
Введение в анализ	6
Дифференциальное исчисление	7
Интегральное исчисление.....	8
Ряды	11
Множества, мощность, метрические пространства	11
Функции комплексного переменного.....	13
Функциональные уравнения	13
Многочлены	14
Уравнения, неравенства, системы	16
Матрицы и определители	19
Абстрактная алгебра	22
Теория чисел, целые числа, уравнения в целых числах, делимость	23
Комбинаторика	28
Теория вероятностей	30
Планиметрия	32
РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ	37
ЛИТЕРАТУРА.....	143