МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Учебно-методическое пособие для вузов

Составитель
А. А. Куликов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

Предисловие

В настоящем пособии рассматривается одна из наиболее сложных тем курса уравнений математической физики – классификация и приведение к каноническому виду квазилинейных уравнений с частными производными второго порядка.

Изложение материала в пособии опирается на результаты, содержащиеся в курсах математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений и теории функций одной и многих комплексных переменных. В отличие от ряда общедоступных учебников по уравнениям математической физики значительное внимание в пособии уделено понятиям вещественного, а также комплексного общего интеграла обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, используемых соответственно для приведения к каноническому виду уравнений гиперболического и эллиптического типов.

Пособие предназначено для студентов 3-го курса факультета прикладной математики, информатики и механики. Оно содержит ряд упражнений и задач, решение которых позволит успешно освоить рассматриваемую тему.

§ 1. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

Рассмотрим квазилинейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными x, y:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \qquad (1.1)$$

где $a_{11} = a_{11}(x,y)$, $a_{12} = a_{12}(x,y)$, $a_{22} = a_{22}(x,y)$ и B – заданные вещественные функции, $u = u(x,y)$ – неизвестная функция. Функции a_{11}, a_{12}, a_{22} называются *коэффициентами* уравнения (1.1).

Мы будем предполагать, что: 1) коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} непрерывно дифференцируемы в некоторой области $\Omega \subset R^2$ и одновременно не обращаются в нуль ни в одной точке этой области; 2) функция B определена при $(x, y) \in \Omega$; 3) функция u принимает вещественные значения и дважды непрерывно дифференцируема в Ω.

Зафиксируем произвольную точку $M_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Без ограничения общности можно считать, что существует окрестность $\Omega_0 \subset \Omega$ точки M_0, такая, что $a_{11}(x, y) \neq 0$ для всех $(x, y) \in \Omega_0$. Действительно, если

$$= v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}\cdot\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y +$$

$$+ v_\xi\xi_{xy} + v_\eta\eta_{xy}, \qquad (1.8)$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}\eta_y^2 + v_\xi\xi_{yy} + v_\eta\eta_{yy}. \qquad (1.9)$$

Подставив выражения (1.3) – (1.9) в уравнение (1.1), получим уравнение

$$A_{11}v_{\xi\xi} + 2A_{12}v_{\xi\eta} + A_{22}v_{\eta\eta} + \widetilde{B} = 0, \qquad (1.10)$$

где

$$A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \qquad (1.11)$$

$$A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\cdot\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\,\xi_y\eta_y, \qquad (1.12)$$

$$A_{22} = a_{11}\,\eta_x^2 + 2a_{12}\,\eta_x\eta_y + a_{22}\,\eta_y^2, \qquad (1.13)$$

$\widetilde{B}$ – функция, зависящая в общем случае от ξ, η, v, v_ξ, v_η и от частных производных до второго порядка включительно функций ξ и η по переменным x и y.

Упражнение 1. Показать, что если уравнение (1.1) линейно, то уравнение (1.10) также будет линейным.

Упражнение 2. Непосредственной проверкой убедиться, что

$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right)^2. \qquad (1.14)$$

Выберем функции $\xi = \varphi(x,y)$ и $\eta = \psi(x,y)$ так, чтобы коэффициенты A_{11} и A_{22} обращались в нуль в области V_0. Тогда функции ξ и η должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0, \qquad (1.15)$$

$$a_{11}\,\eta_x^2 + 2a_{12}\,\eta_x\eta_y + a_{22}\,\eta_y^2 = 0. \qquad (1.16)$$

Уравнения (1.15) и (1.16) идентичны, поэтому в дальнейшем будем рассматривать уравнение (1.15).

Так как $a_{11}(x,y) \neq 0$ при $(x,y) \in V_0$, то уравнение (1.15) можно записать в виде

$$\left(\xi_x + \lambda_1\xi_y\right)\left(\xi_x + \lambda_2\xi_y\right) = 0,\ (x,y) \in V_0, \qquad (1.17)$$

где

$$\lambda_1 = \lambda_1(x, y) = \frac{a_{12}(x,y) + \sqrt{d(x,y)}}{a_{11}(x,y)},$$

$$\lambda_2 = \lambda_2(x, y) = \frac{a_{12}(x,y) - \sqrt{d(x,y)}}{a_{11}(x,y)},$$

$$d(x,y) = a_{12}^2(x,y) - a_{11}(x,y)a_{22}(x,y).$$

Задание 2. Повторить теорему существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка [3, § 1].

Пусть $G \subset R^2$ – некоторая область. Через $C(G)$ будем обозначать совокупность всех непрерывных в области G функций, а через $C^k(G)$, где $k = 1, 2, \ldots$ – совокупность всех функций, имеющих в этой области непрерывные частные производные до порядка k включительно.

Пусть $\mu(x,y)$ – функция класса $C^1(G)$ и $g(x,y)$ – функция класса $C(G)$, для которой существует производная $g_y(x,y) \in C(G)$. Предполагается, что функции μ и g принимают вещественные значения.

Будем говорить, что соотношение $\mu(x,y) = \text{const}$ является *общим интегралом (вещественным общим интегралом)* обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = g(x,y) \tag{1.18}$$

в области G, если для любой фиксированной точки $(x^*, y^*) \in G$ найдется постоянная $\delta^* > 0$, такая, что: 1) для любого x, удовлетворяющего условию $\left| x - x^* \right| < \delta^*$, существует единственное решение $y = f(x, C^*)$ уравнения $\mu(x,y) = C^*$, где $C^* = \mu(x^*, y^*)$, причем точка $(x,y) \in G$; 2) функция $y = f(x, C^*)$ является решением уравнения (1.18) при $\left| x - x^* \right| < \delta^*$.

При $\left| x - x^* \right| < \delta^*$ выполняется равенство $\mu(x, f(x, C^*)) = C^*$, и, в частности, $\mu(x^*, f(x^*, C^*)) = C^*$. С другой стороны, $C^* = \mu(x^*, y^*)$ и, следовательно, $y^* = f(x^*, C^*)$.

Пусть имеется функция $y = f_1(x)$, которая является решением уравнения (1.18) на интервале $I = \left\{ x \in R : \left| x - x^* \right| < \delta^* \right\}$, причем $y^* = f_1(x^*)$. Тогда, в силу теоремы единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, это решение совпадает на интервале I с решением $y = f(x, C^*)$, которое получается из соотношения $\mu(x,y) = C^*$. Поэтому соотношение $\mu(x,y) = \text{const}$ дает все решения уравнения (1.18) в области $\boldsymbol{G}$, чем и объясняется, что оно носит название «общий интеграл уравнения (1.18) в области $\boldsymbol{G}$».

Заметим, что если $\mu_y(x,y)\neq 0$ в области G, то, в силу теоремы о неявной функции, условие 1) в определении общего интеграла будет выполнено.

Т е о р е м а. *Пусть* $d(x,y)\geq 0$ *при* $(x,y)\in V_0$. *Тогда для того, чтобы функция* $\xi=\varphi(x,y)$ *была решением уравнения (1.15) в области* V_0, *необходимо и достаточно, чтобы соотношение* $\varphi(x,y)=\mathrm{const}$ *было общим интегралом одного из обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1(x,y) \tag{1.19}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_2(x,y) \tag{1.20}$$

в области V_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Н е о б х о д и м о с т ь. Предварительно отметим, что в силу условия $d(x,y)\geq 0$ функции $\lambda_1(x,y)$ и $\lambda_2(x,y)$ принимают вещественные значения.

Пусть функция $\xi=\varphi(x,y)$ является в области V_0 решением уравнения (1.15), или, что то же самое, уравнения (1.17), то есть

$$\left(\varphi_x+\lambda_1\varphi_y\right)\left(\varphi_x+\lambda_2\varphi_y\right)=0,\ (x,y)\in V_0. \tag{1.21}$$

Если предположить, что в некоторой точке $(x_1,y_1)\in V_0$ $\varphi_y(x_1,y_1)=0$, то из (1.21) будет следовать, что $\varphi_x(x_1,y_1)=0$. Но тогда якобиан $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}$ обращается в нуль в точке (x_1,y_1), что противоречит определению области V_0. Поэтому $\varphi_y(x,y)\neq 0$ для всех $(x,y)\in V_0$.

В силу (1.21) функция $\varphi(x,y)$ должна удовлетворять одному из уравнений

$$\varphi_x+\lambda_1\varphi_y=0,\ (x,y)\in V_0 \tag{1.22}$$

или

$$\varphi_x+\lambda_2\varphi_y=0,\ (x,y)\in V_0. \tag{1.23}$$

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqdd Ɏqɏè