МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В.П. Орлов

БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

Учебно-методическое пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

Содержание

1 Введение 4

2 Бесколиционные игры 6

3 Равновесие по Нэшу 8

4 Оптимальность по Парето 11

5 Смешанное расширение бескоалиционной игры 15

2. Бескоалиционные игры

Пусть заданы непустые множества X_i, где $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим множество $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, то есть $X = \{x = (x_1, \ldots, x_n) |\, x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ определим функцию $H_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to R^1$. Процесс бескоалиционной игры кратко можно описать следующим образом. Участники игры независимо друг от друга выбирают стратегии $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$. В результате в игре складывается набор стратегий $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, называемый ситуацией, и i-й игрок получает выигрыш $H_i(x)$. В качестве исхода игры рассматривается вектор $H(x) = (H_1(x), \ldots, H_n(x))$. При этом игрок i предпочитает ситуации x ситуацию x' тогда и только тогда, когда $H_i(x') > H_i(x)$. Если $H_i(x') = H_i(x)$, то ситуации x и x' для игрока i равноценны.

Определение 1. *Система*

$$\Gamma = (N,\ \{X_i\}_{i \in N},\ \{H_i\}_{i \in N}),$$

в которой $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ - множество игроков, X_i - множество стратегий игрока i, H_i - функция выигрыша игрока i, определённая на декартовом произведении множеств стратегий игроков $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ (множество ситуаций игры), называется бескоалиционной игрой.

Рассмотрим теперь частные случаи бескоалиционной игры n лиц.

Определение 2. *Если множества стратегий игроков X_i, где $i \in \{1, \ldots, n\}$ конечны, то игра называется конечной бескоалиционной игрой n лиц.*

Определение 3. *Бескоалиционная игра Γ, в которой принимают участие два игрока, называется игрой двух лиц $(\Gamma = (X_1,\ X_2,\ H_1,\ H_2))$.*

Определение 4. *Конечная бескоалиционная игра двух лиц называется биматричной.*

При этом удобно считать, что $X_1 = \{1,\ \ldots,\ m\}$, $\quad X_2 = \{1,\ \ldots,\ n\}$, а функции H_1 и H_2 записываются в виде матриц

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{m1} & \ldots & \beta_{mn} \end{bmatrix}.$$

Здесь элементы $\alpha_{ij} = H_1(i,j)$ и $\beta_{ij} = H_2(i,j)$ матриц A и B являются соответственно выигрышами игроков 1 и 2 в ситуации $(i,\ j)$, $\quad i \in X_1,\ j \in X_2$.

Замечание 1. *В процессе биматричной игры игрок 1 выбирает номер i-й строки, а игрок 2 (одновременно и независимо) - номер j-го столбца матрицы $(A,\ B)$. В результате в игре образуется ситуация $(i,\ j)$, причём игрок 1 получает выигрыш α_{ij}, а игрок 2 - выигрыш β_{ij}.*

Часто биматричную игру записывают в виде

$$(A,B) = \begin{bmatrix} (\alpha_{11}, \beta_{11}) & \ldots & (\alpha_{1n}, \beta_{1n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\alpha_{m1}, \beta_{m1}) & \ldots & (\alpha_{mn}, \beta_{mn}) \end{bmatrix}.$$

В качестве примера бескоалиционной игры рассмотрим биматричную игру «Семейный спор».

Пример 1 (Игра «Семейный спор»). Рассматривается биматричная игра (игра двух лиц) с матрицей

$$(A,B) = \begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Муж (игрок 1) и жена (игрок 2) могут выбрать одно из двух развлечений: футбольный матч или театр. Таким образом множество стратегий игрока 1 имеет вид $X_1 = \{I_1,\ I_2\}$, где I_1 - футбольный матч, I_2 - театр, а множество стратегий игрока 2 $X_2 = \{II_1,\ II_2\}$, где II_1 - футбольный матч, II_2 - театр. Муж (игрок 1) предпочитает футбольный матч, а жена (игрок 2) - театр. Поэтому в случае появления ситуации $(I_1,\ II_1)$ игрок 1 выигрывает больше чем игрок 2 (вектор выигрышей $(4,\ 1)$), а в ситуации $(I_2,\ II_2)$ игрок 2 выигрывает больше чем игрок 1 (вектор выигрышей $(1,\ 4)$). Однако обоим важнее быть вместе, чем участвовать в развлечении (хотя и предпочтительном) одному, так как если они имеют разные желания (ситуации $(I_1,\ II_2)$ или $(I_2,\ II_1)$), то в обоих случаях выигрыши игроков 1, 2 равны нулю.

Как уже отмечалось, решить игру означает рекомендовать каждому игроку наилучший (оптимальный) в некотором смысле ход (стратегию). Однако в теории бескоалиционных игр нет единого подхода к выработке понятия оптимального хода, так как известно целое множество принципов оптимальности, дающих различные решения игры. При этом выбор определённого принципа оптимальности приводит к различным постановкам задачи, что надо искать. По существу, за одним названием скрываются разные задачи.

Для бескоалиционных игр будут рассмотрены два основных принципа оптимальности: равновесие по Нэшу, и оптимальность по Парето.

3. Равновесие по Нэшу

Рассмотрим понятие равновесия по Нэшу для бескоалиционной игры n лиц. Пусть $x = (x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n)$ - произвольная ситуация в бескоалиционной игре Γ, а x_i - некоторая стратегия игрока i. Построим ситуацию, которая отлична от x только тем, что стратегия x_i игрока i заменена на стратегию x_i'. В результате мы получаем ситуацию $(x_1,\ \ldots, x_{i-1},\ x_i',\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n)$, которую будем обозначать через $(x\|x_i') = x$.

Определение 5. *Ситуация* $x^* = (x_1^*,\ \ldots,\ x_i^*,\ \ldots,\ x_n^*)$ *называется ситуацией равновесия по Нэшу, если для всех* $x_i \in X_i$ *и* $i = 1,\ \ldots,\ n$ *имеет место*

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè