Вестник Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

Серия 3. **ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

№ 3 • 2014 • МАЙ–ИЮНЬ

Издательство Московского университета

Выходит один раз в два месяца

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Расчет волноводов методом конечных элементов с использованием процедуры Банча–Кауфман

Ю. В. Мухартова, Н. А. Боголюбов[a]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] russell67@yandex.ru

Статья поступила 04.02.2014, подписана в печать 06.02.2014.

Построен и реализован алгоритм численного решения задачи на собственные значения в волноводе в полной векторной постановке с использованием метода конечных элементов и процедуры Банча–Кауфман для факторизации матрицы получаемой системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: металлодиэлектрический волновод, метод конечных элементов, метод Банча–Кауфман, факторизация матрицы.

УДК: 519.63; 537.87. PACS: 02.60.Cb.

Введение

Метод конечных элементов (МКЭ) является одним из самых эффективный методов для численного решения задач математической физики и техники [1–7]. Первые попытки применения метода конечных элементов к расчету волноведущих систем относятся к середине шестидесятых годов прошлого века. К этому времени техника этого метода была хорошо разработана, и он успешно применялся для решения граничных задач механики. Были выписаны и исследованы вариационные функционалы для волноводов произвольного типа [8]. Первые работы были посвящены расчетам с помощью МКЭ металло-диэлектрических волноводов, а затем разработанная в этих работах техника была обобщена на открытые волноводные структуры [9–13].

Настоящая работа посвящена разработке и реализации эффективного численного алгоритма расчета основных характеристик волноводов с диэлектрическим заполнением на основе метода конечных элементов. Рассматривается полная векторная постановка задачи. В результате использования техники метода конечных элементов задача сводится к обобщенной алгебраической проблеме собственных значений [12]. Матрицы, фигурирующие в постановке этой задачи, являются незнакоопределенными симметричными ленточными матрицами высокого порядка. Их факторизация, необходимая для последующего использования итерационных методов, требует специальной стратегии, позволяющей учесть все вышеперечисленные особенности. В качестве таковой была разработана стратегия, основанная на одном из вариантов метода Банча - методе Банча-Кауфман, которая предоставляет возможность разрешить проблемы, связанные со спецификой данных матриц [13, 14]. Важное место в данном алгоритме занимает использование оптимальной схемы хранения элементов матриц, а также методики построения таких матриц, одним из вариантов которой является использование опорных матриц.

1. Постановка краевой задачи

В регулярном волноводе прямоугольного поперечного сечения D с идеально проводящими стенками [15] введем декартову систему координат, направив ось z вдоль оси волновода, а оси x и y — параллельно границам сечения.

Решая систему уравнений Максвелла для гармонических электромагнитных полей, т. е. разыскивая решение в виде

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\boldsymbol{E}(x,y,z,)e^{-i\omega t};$$
$$\boldsymbol{H}(x,y,z,t)=\boldsymbol{H}(x,y,z,)e^{-i\omega t}$$

и выражая вектор электрического поля $\boldsymbol{E}$ через вектор магнитного поля $\boldsymbol{H}$, запишем уравнение для магнитной составляющей поля:

$$\operatorname{rot}\left(\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\right)-k^2\mu\boldsymbol{H}=0. \quad (1)$$

Граничное условие для вектора $\boldsymbol{E}$ в случае идеальной проводящей стенки $[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}]_{\partial D}=0$ переходит в два граничных условия для вектора $\boldsymbol{H}$:

$$\begin{cases}\left[\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\widetilde{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{n}\right]_z\Big|_{\partial D}=0,\\ n_x\left(\widetilde{H}_x-\partial_x\widetilde{H}_z\right)_{\partial D}=n_y\left(\partial_y\widetilde{H}_z-\widetilde{H}_y\right)_{\partial D}.\end{cases} \quad (2)$$

Граничные условия (2) являются для поставленной задачи естественными [3].

Рассматривая модовые решения вида $\boldsymbol{H}(x,y,z)=\boldsymbol{H}(x,y)e^{i\beta z}$, где β — постоянная распространения, и производя замену переменных $\widetilde{H}_x=i\beta H_x$; $\widetilde{H}_y=i\beta H_y$; $\widetilde{H}_z=H_z$, после несложных преобразований получим систему уравнений, записанную в матричном виде:

$$\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{H}}=\beta^2\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{H}}. \quad (3)$$

Здесь матрицы A и B имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)-k^2\mu & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x}\right) & 0\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x}\right) & -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)-k^2\mu & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$