

Вестник Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

Серия 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

№ 3 • 2014 • МАЙ–ИЮНЬ

Издательство Московского университета

Выходит один раз в два месяца

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Теоретическая и математическая физика

- Мухартова Ю.В., Боголюбов Н.А. Расчет волноводов методом конечных элементов с использованием процедуры Банча–Кауфман 3
- Пытьев Ю.П., Газарян В.А., Росницкий П.Б. Сравнительный анализ эффективности вероятностного и возможностного алгоритмов медицинской диагностики 8
- Чуличков А.И., Юань Боюань. О возможности оценивания значения функции в заданных точках ее области определения по измерениям конечного числа ее линейных функционалов 15
- Родионов В.Н., Кравцова Г.А. Неэрмитова PT -симметричная релятивистская квантовая механика с максимальной массой 20
- Дергачёв М.А., Савченко А.М., Садовников Б.И. Влияние спиновых флуктуаций на фазовые переходы в магнитных системах 26

Физика атомного ядра и элементарных частиц

- Алиев Р.А., Бельшиев С.С., Джилавян Л.З., Ишханов Б.С., Ханкин В.В., Шведун В.И. Исследование возможностей получения и выделения радиоизотопа ^{18}F на ускорителях электронов 29
- Гончарова Н.Г., Долгодворов А.П., Сергеева С.И. Проявление оболочечных эффектов в коллективных характеристиках атомных ядер 33

Физика конденсированного состояния вещества

- Дмитриев А.В., Ткачева Е.С. Вычисление термоэлектрических величин PbTe в трехзонной модели электронного энергетического спектра 38

Биофизика и медицинская физика

<i>Мазуров М.Е., Калюжный И.М.</i> Автоволны кругового типа в предсердиях человека и начальные условия для их возникновения	45
---	----

Астрономия, астрофизика и космология

<i>Охлопков В.П.</i> 11-летний цикл солнечной активности и конфигурации планет	50
--	----

Физика Земли, атмосферы и гидросферы

<i>Куницын В.Е., Воронцов А.М.</i> Моделирование распространения на ионосферных высотах акустико-гравитационных волн, порожденных цунами от землетрясения Тохoku 2011 г.	56
<i>Будников А.А., Чашечкин Ю.Д.</i> Перенос маркеров в установившемся составном вихре	63

Персоналии

<i>Панасюк М.И.</i> Г.П. Любимов приоткрывает тайны гелиосферы (к 90-летию Германа Павловича Любимова)	67
--	----

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Расчет волноводов методом конечных элементов с использованием процедуры Банча–Кауфман

Ю. В. Мухартова, Н. А. Боголюбов^а*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.**E-mail: ^а russell67@yandex.ru*

Статья поступила 04.02.2014, подписана в печать 06.02.2014.

Построен и реализован алгоритм численного решения задачи на собственные значения в волноводе в полной векторной постановке с использованием метода конечных элементов и процедуры Банча–Кауфман для факторизации матрицы получаемой системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: металлодиэлектрический волновод, метод конечных элементов, метод Банча–Кауфман, факторизация матрицы.

УДК: 519.63; 537.87. PACS: 02.60.Сб.

Введение

Метод конечных элементов (МКЭ) является одним из самых эффективных методов для численного решения задач математической физики и техники [1–7]. Первые попытки применения метода конечных элементов к расчету волноведущих систем относятся к середине шестидесятых годов прошлого века. К этому времени техника этого метода была хорошо разработана, и он успешно применялся для решения граничных задач механики. Были выписаны и исследованы вариационные функционалы для волноводов произвольного типа [8]. Первые работы были посвящены расчетам с помощью МКЭ металло-диэлектрических волноводов, а затем разработанная в этих работах техника была обобщена на открытые волноводные структуры [9–13].

Настоящая работа посвящена разработке и реализации эффективного численного алгоритма расчета основных характеристик волноводов с диэлектрическим заполнением на основе метода конечных элементов. Рассматривается полная векторная постановка задачи. В результате использования техники метода конечных элементов задача сводится к обобщенной алгебраической проблеме собственных значений [12]. Матрицы, фигурирующие в постановке этой задачи, являются незнакоопределенными симметричными ленточными матрицами высокого порядка. Их факторизация, необходимая для последующего использования итерационных методов, требует специальной стратегии, позволяющей учесть все вышеперечисленные особенности. В качестве таковой была разработана стратегия, основанная на одном из вариантов метода Банча - методе Банча-Кауфман, которая предоставляет возможность разрешить проблемы, связанные со спецификой данных матриц [13, 14]. Важное место в данном алгоритме занимает использование оптимальной схемы хранения элементов матриц, а также методики построения таких матриц, одним из вариантов которой является использование опорных матриц.

1. Постановка краевой задачи

В регулярном волноводе прямоугольного поперечного сечения D с идеально проводящими стенками [15]

введем декартову систему координат, направив ось z вдоль оси волновода, а оси x и y — параллельно границам сечения.

Решая систему уравнений Максвелла для гармонических электромагнитных полей, т. е. разыскивая решение в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}(x, y, z) e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}(x, y, z) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

и выражая вектор электрического поля \mathbf{E} через вектор магнитного поля \mathbf{H} , запишем уравнение для магнитной составляющей поля:

$$\operatorname{rot}(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}) - k^2 \mu \mathbf{H} = 0. \quad (1)$$

Граничное условие для вектора \mathbf{E} в случае идеальной проводящей стенки $[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_{\partial D} = 0$ переходит в два граничных условия для вектора \mathbf{H} :

$$\begin{cases} [\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} \times \mathbf{n}]_z|_{\partial D} = 0, \\ n_x (\tilde{H}_x - \partial_x \tilde{H}_z)|_{\partial D} = n_y (\partial_y \tilde{H}_z - \tilde{H}_y)|_{\partial D}. \end{cases} \quad (2)$$

Граничные условия (2) являются для поставленной задачи естественными [3].

Рассматривая модовые решения вида $\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(x, y) e^{i\beta z}$, где β — постоянная распространения, и производя замену переменных $\tilde{H}_x = i\beta H_x$; $\tilde{H}_y = i\beta H_y$; $\tilde{H}_z = H_z$, после несложных преобразований получим систему уравнений, записанную в матричном виде:

$$A \tilde{\mathbf{H}} = \beta^2 B \tilde{\mathbf{H}}. \quad (3)$$

Здесь матрицы A и B имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) - k^2 \mu & \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \right) & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) - k^2 \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$