

OSTWALDS KLASSIKER

DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

8. Gebunden.

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

- Nr. 1. **H. Helmholtz**, Erhalt. der Kraft. (1847.) 7. Taus. (60 S.) *M* 1.—.
2. **C. F. Gauss**, Allgem. Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfern. wirk. Anziehungs- u. Abstoß.-Kräfte. (1840.) Herausg. v. A. Wangerin. 3. Aufl. (60 S.) *M* 1.—.
5. ——— Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. v. Wangerin. 4. Auflage. (64 S.) *M* 1.—.
10. **F. Neumann**, Die mathematischen Gesetze d. inducirten elektrischen Ströme. (1845.) Herausg. v. C. Neumann. (96 S.) *M* 1.90.
11. **Galileo Galilei**, Unterred. u. mathem. Demonstrat. über zwei neue Wissenszweige usw. (1638.) 1. Tag m. 13 u. 2. Tag m. 26 Fig. 1. Text. Aus d. Ital. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. Dritter, unveränderter Abdruck. (142 S.) *M* 3.75.
14. **C. F. Gauss**, Die 4 Beweise der Zerleg. ganzer algebr. Funktionen usw. (1799—1849.) Hrsg. v. E. Netto. 2. Aufl. Mit 1 Taf. (81 S.) *M* 1.90.
17. **A. Bravais**, Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. u. in Gemeinschaft mit P. Groth herausgeg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) *M* 1.25.
19. Über die Anzieh. homogener Ellipsoide, Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausgeg. von A. Wangerin. (118 S.) *M* 2.50.
24. **Galileo Galilei**, Unterred. u. math. Demonstrat. üb. 2 neue Wissenszweige usw. (1638.) 3. u. 4. Tag, m. 90 Fig. i. Text. Aus d. Ital. u. Lat. übers. u. hrsg. v. A. v. Oettingen. 2. Aufl. (141 S.) *M* 2.50.
25. ——— Anh. z. 3. u. 4. Tag, 5. u. 6 Tag, mit 23 Fig. im Text. Aus d. Ital. u. Latein. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. 2., unveränderter Abdruck. (66 S.) *M* 1.50.
36. **F. Neumann**, Theorie inducirter elektr. Ströme. (1847.) Herausgeg. von C. Neumann. Mit 10 Fig. im Text. (96 S.) *M* 1.90.
46. Abhandlg. über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696); **Jac. Bernoulli** (1697) u. **Leonhard Euler** (1744). Herausg. v. P. Stäckel. Mit 19 Textfig. (144 S.) *M* 2.50.
47. ——— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgeg. von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) *M* 2.—.
53. **C. F. Gauss**, Die Intensität der erdmagnet. Kraft auf absolutes Maß zurückgeführt. Herausgeg. von E. Dorn. (62 S.) *M* 1.25.
54. **J. H. Lambert**, Anm. u. Zusätze zur Entw. d. Land- u. Himmelscharten. (1772.) Herausg. v. A. Wangerin. Mit 21 Textfig. (96 S.) *M* 2.—.

Über
die Lösung der unbestimmten Probleme
zweiten Grades

von

Joseph Louis Lagrange

(1768)

Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben

von

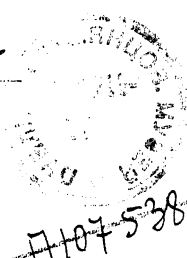
Eugen Netto

in Gießen

Leipzig

Verlag von Wilhelm Engelmann

1904



2000

•



Über die Lösung der unbestimmten Probleme zweiten Grades

von

Joseph Louis Lagrange.

[377] *) Ein Problem heißt unbestimmt, falls die Schlußgleichung, auf die die Lösung einer Aufgabe führt, mehr als eine Unbekannte enthält; im allgemeinen gibt es dann eine unendliche Anzahl von Lösungen. Wenn aber die Natur der Frage fordert, daß die gesuchten Größen rationale oder gar ganze Zahlen seien, so kann die Anzahl der Lösungen eine sehr beschränkte werden; die Schwierigkeit liegt darin, unter allen möglichen Lösungen die zu finden, die der vorgeschriebenen Bedingung genügen. Ist die Schlußgleichung vom ersten Grade, so folgt die Rationalität aller Lösungen aus der Natur dieser Gleichung selbst; fordert man dabei weiter, daß die Unbekannten ganze Zahlen seien, so kann man sie leicht nach der Methode der Kettenbrüche bestimmen (vgl. Nr. 8). Anders, wenn die Schlußgleichungen von höherem als dem ersten Grade sind; denn solche führen ihrer Natur nach auf irrationale Ausdrücke. Man kennt keine direkte und allgemeine Methode zur Auffindung kommensurabler Zahlen, die solchen Gleichungen genügen, selbst wenn sie nur vom zweiten Grade sind; [378] und man muß zugeben, daß dieser hochwichtige Zweig der Analysis von den Mathematikern vernachlässigt worden ist, oder zum mindesten, daß sie in ihm nur geringe Fortschritte zu verzeichnen haben.

Freilich haben *Diophant* und seine Erklärer eine große Anzahl unbestimmter Aufgaben vom zweiten, dritten und selbst vom vierten Grade gelöst; allein ihre Lösungen sind meist nur

*) Diese und die entsprechenden eingeklammerten Zahlen geben die Seiten der französischen Abhandlung im zweiten Bande der »Œuvres de Lagrange, publiées par J.-A. Serret, Paris 1868.«

auf Einzelfälle zugespitzt; deshalb ist es auch nicht erstaunlich, daß sich die Behandlung eben so einfacher wie allgemeiner Fälle den Methoden des *Diophant* völlig entzieht.

Wenn es sich z. B. darum handelt, unter der Voraussetzung, daß A und B ganze, nicht quadratische Zahlen sind, die Gleichung $A + Bt^2 = u^2$ zu lösen, oder mit anderen Worten, wenn man einen rationalen Wert t suchen soll, der $A + Bt^2$ zu einem Quadrate macht, so überzeugt man sich leicht davon, daß alle, aus der »Analysis« des *Diophant* bekannten Kunstgriffe hierfür versagen. Nun reduziert sich aber, wie man später sehen wird, gerade auf diesen Fall die allgemeine Lösung der unbestimmten Probleme zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Meines Wissens hat sich niemand außer *Euler* mit dieser Frage beschäftigt. *Euler* behandelt sie in zwei vorzüglichen Abhandlungen,¹⁾ die sich in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie finden (Commentarii Acad. VI [1738] p. 175 und Novi Commentarii IX [1764] p. 3). Aber durch sie ist der Stoff bei weitem nicht erschöpft. Denn 1. hat *Euler* bei der Gleichung $A + Bt^2 = u^2$ nur den Fall betrachtet, wo B positiv ist, und t, u ganzzahlig sind; 2. setzt *Euler* in diesem Falle noch voraus, man kenne schon eine Lösung der Gleichung, und gibt eine Methode, um aus dieser bekannten Lösung eine unendliche Menge anderer Lösungen herzuleiten. Dabei hat dieser große Mathematiker nicht etwa versucht, auch Regeln zu geben, nach denen man von vornherein erkennen könne, ob die vorgelegte Gleichung lösbar sei oder nicht; sondern abgesehen davon, daß seine Regeln nur auf zweifelhaften Boden gegründet und nur induktiv hergeleitet sind, bieten sie für die Auffindung der als bekannt angesehenen ersten Lösung keinen Nutzen (vgl. insbesondere den Schluß der zweiten oben angeführten Abhandlung p. 38); 3. liefern die *Eulerschen* Formeln, mit deren Hilfe aus einer Lösung unendlich viele hergeleitet werden können, nur dann alle möglichen Lösungen, wenn A eine Primzahl ist (vgl. Nr. 45).

[379] Die Untersuchungen, die ich seit einiger Zeit über diesen Gegenstand angestellt habe, führten mich zu direkten, allgemeinen und neuen Methoden, Gleichungen von der Form $A + Bt^2 = u^2$ und allgemein jede Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten zu lösen, sei es, daß die Unbekannten ganze oder gebrochene Zahlen sein dürfen, sei es, daß sie ganze Zahlen sein müssen. Diese Methoden bilden den Gegenstand der folgenden Abhandlung. Ich halte sie der Aufmerksamkeit