

УДК 53:51 + 530.1
ББК 22.31+29.05.03+22.311
К 891

Интернет-магазин
MATHESIS
<http://shop.rcd.ru>

• **физика**
• **математика**
• **биология**
• **нефтегазовые**
технологии

Кузнецов С. П.

Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. — 488 с.

Книга посвящена рассмотрению возможности реализации в физических системах структурно устойчивого хаоса, обусловленного присутствием однородно гиперболических аттракторов, таких как соленоид Смейла–Вильямса, ДА-аттрактор Смейла, аттракторы типа Плыкина. Дается обзор содержательной части гиперболической теории, а также возможных ситуаций появления гиперболических аттракторов. На основе физических принципов конструируются примеры систем с такими аттракторами. Рассмотрены методы компьютерной проверки гиперболичности и даны иллюстрации их применения. Обсуждается моделирование электронных устройств с гиперболическими аттракторами и наблюдение гиперболического хаоса в лабораторных экспериментах.

Книга предназначена для студентов, аспирантов, исследователей в области нелинейной динамики и ее приложений.

ISBN 978-5-4344-0100-5

ББК 22.31+29.05.03+22.311

© С. П. Кузнецов, 2013

© Ижевский институт компьютерных исследований, 2013

<http://shop.rcd.ru>
<http://ics.org.ru>

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
Часть I. Основные понятия и обзор	19
Глава 1. Динамические системы	21
1.1. Динамические системы: основные понятия. Системы с непрерывным и дискретным временем и их взаимосвязь	22
1.2. Описание динамики в терминах «фазовой жидкости». Консервативные и диссипативные системы. Аттракторы	25
1.3. О динамических системах в механике	27
1.4. Показатели Ляпунова и их вычисление	30
1.5. Грубые системы и структурная устойчивость	35
Глава 2. Формальные примеры хаотических аттракторов	37
2.1. Хаос в рамках представления о фазовой жидкости и отображение пекаря	38
2.2. Соленоид Смейла–Вильямса	41
2.3. DA-аттрактор	42
2.4. Аттракторы типа Плыкина	44
Глава 3. Основы гиперболической теории	47
3.1. Понятие гиперболичности	48
3.2. Содержание и результаты гиперболической теории	52
3.2.1. Критерий конусов	54
3.2.2. Неустойчивость	55
3.2.3. Поперечная канторова структура аттрактора и размерность Каплана–Йорке	56
3.2.4. Марковские разбиения и символическая динамика	57
3.2.5. Перечисление орбит и топологическая энтропия	59
3.2.6. Структурная устойчивость	59
3.2.7. Инвариантная мера Синая–Рюэля–Боуэна	60
3.2.8. Отслеживание псевдотраекторий и воздействие шума	62
3.2.9. Эргодичность и перемешивание	62
3.2.10 Энтропия Колмогорова–Синая	63

Глава 4. Где искать гиперболические аттракторы?	65
4.1. Теорема Ньюхауса–Такенса–Рюэля и ее отношение к однородно гиперболическим аттракторам	66
4.2. Модель Лоренца и ее модификации	69
4.3. Некоторые отображения с однородно гиперболическими аттракторами	72
4.4. От DA-аттрактора к аттрактору типа Плыкина	75
4.5. Пример Ханта: надстройка аттрактора типа Плыкина	80
4.6. Движение по геодезическим линиям на поверхности отрицательной кривизны и механическая система с гиперболической динамикой	86
4.7. Возможное возникновение аттрактора Плыкина в модели нейрона типа Хиндмарша–Роуза	92
4.8. Катастрофа голубого неба и рождение аттрактора Смейла–Вильямса	94
4.9. Машина для вытягивания сахарной ваты	96
Часть II. Низкоразмерные модели	99
Глава 5. Механическое движение с толчками	101
5.1. Механические модели: движение частицы на плоскости под действием периодических толчков	102
5.2. Численное моделирование и наблюдение аттракторов типа соленоида Смейла–Вильямса	104
Глава 6. Дифференциальные уравнения с периодическими переключениями	109
6.1. Система с переключениями, имеющая аттрактор типа Смейла–Вильямса	110
6.2. Динамическая система с аттрактором типа Плыкина	112
6.2.1. Аттрактор типа Плыкина на сфере	113
6.2.2. Аттрактор типа Плыкина на плоскости	117
Глава 7. Неавтономные системы на основе связанных автоколебательных элементов	125
7.1. Осциллятор ван дер Поля	126
7.2. Аттрактор Смейла–Вильямса в неавтономной системе попеременно возбуждаемых осцилляторов ван дер Поля	129
7.3. Система попеременно возбуждаемых осцилляторов ван дер Поля, описываемая в терминах медленных комплексных амплитуд	140

7.4. Нерезонансная передача возбуждения	142
7.5. Аттрактор типа Плыкина в неавтономной системе связанных осцилляторов	143
7.5.1. Представление состояний на сфере и уравнения модели..	144
7.5.2. Численные результаты для связанных осцилляторов.....	147
Глава 8. Автономные системы с однородно гиперболическими аттракторами	151
8.1. Автономная система двух связанных осцилляторов с саморегулирующимся попеременным возбуждением	152
8.2. Система, построенная на основе модели хищник–жертва	155
8.3. Пример катастрофы голубого неба, сопровождающейся рождением аттрактора Смейла–Вильямса	162
8.4. Минимальная модель с аттрактором Смейла–Вильямса	169
Глава 9. Параметрические генераторы гиперболического хаоса	175
9.1. Параметрическое возбуждение связанных осцилляторов. Трехчастотный параметрический генератор	176
9.2. Гиперболический хаос в параметрическом генераторе с модулированной добротностью и модуляцией накачки	180
9.2.1. Динамические уравнения	181
9.2.2. Качественное объяснение механизма работы	183
9.2.3. Численные результаты	185
9.2.4. Численные результаты в рамках метода медленных комплексных амплитуд	188
9.3. Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе четырех связанных осцилляторов с модуляцией накачки	190
9.3.1. Модель, принцип действия и основные уравнения	192
9.3.2. Хаотическая динамика: результаты компьютерного моделирования	194
Глава 10. Гиперболическая динамика в амплитудных уравнениях ..	201
10.1. Амплитудная динамика в терминах угловой переменной, подчиняющейся отображению типа Бернулли	202
10.2. Модель двух попеременно возбуждающихся пар осцилляторов ван дер Поля с равными частотами	208
10.3. Модель двух попеременно возбуждаемых пар нерезонансных осцилляторов ван дер Поля	212
10.4. Описание моделей, построенных на основе осцилляторов ван дер Поля, методом медленно меняющихся амплитуд.....	216

Часть III. Проверка гиперболичности	219
Глава 11. Проверка трансверсальности пересечения многообразий	221
11.1. Визуализация многообразий	222
11.2. Распределение углов пересечения многообразий	226
Глава 12. Визуализация инвариантных мер	233
12.1. Методика визуализации инвариантных мер	234
12.2. Численные результаты для гиперболических и негиперболических аттракторов	235
Глава 13. Критерий конусов	241
13.1. Процедура проверки критерия конусов	242
13.2. Примеры применения критерия конусов	249
Часть IV. Многомерные системы и феномены	261
Глава 14. Системы четырех попеременно возбуждающихся неавтономных осцилляторов	263
14.1. Динамика, описываемая отображением «кот Арнольда», в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля	264
14.2. Динамика, соответствующая отображениям с гиперхаосом	272
14.2.1. Система, реализующая отображение с гиперхаосом на торе	273
14.2.2. Модель с каскадной передачей возбуждения вверх по спектру частот	274
Глава 15. Гиперхаос и синхронизация хаоса в системе связанных неавтономных осцилляторов	283
15.1. Уравнения и основные режимы работы	284
15.2. Уравнения для медленных комплексных амплитуд	290
15.3. Динамика фаз	292
15.4. Изрешечивание бассейна и пузырение аттрактора	293
Глава 16. Автономные системы с динамикой вблизи гетероклинического контура	301
16.1. Гетероклинический контур: пример Гукенхеймера и Холмса	302
16.2. Аттрактор типа Смейла–Вильямса в системе трех связанных автоколебательных элементов	304
16.3. Аттрактор с динамикой, описываемой отображением «кот Арнольда»	308

16.4. Модель с гиперхаосом	312
16.5. Автономная система с аттрактором типа Смейла–Вильямса при резонансной передаче возбуждения в кольцевом массиве осцилляторов ван дер Поля	315
Глава 17. Системы с запаздывающей обратной связью	321
17.1. Некоторые сведения о дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом	322
17.2. Осциллятор ван дер Поля с запаздывающей обратной связью, модуляцией параметра и вспомогательным сигналом	326
17.2.1. Аттрактор типа Смейла–Вильямса в системе с запаздыванием	327
17.2.2. Гиперхаос	331
17.3. Осциллятор ван дер Поля с двумя петлями запаздывающей обратной связи и модуляцией параметра	337
17.4. Автономная система с запаздыванием	343
17.5. Параметрический генератор хаоса с запаздывающей обратной связью и модуляцией накачки	347
Глава 18. Гиперболический хаос структур Тьюринга	355
18.1. Структуры Тьюринга и модельные уравнения	356
18.2. Гиперболический хаос в модели Свифта–Хохенберга с модуляцией параметров	358
18.2.1. Кольцевая система	359
18.2.2. Конечномерная модель	364
18.2.3. Система с фиксированными граничными условиями	368
Часть V. Электронные схемы: моделирование и эксперименты	373
Глава 19. Электронные схемы с гиперболическим хаосом в программной среде Multisim	375
19.1. Программный продукт Multisim	376
19.2. Системы с аттрактором Смейла–Вильямса	376
19.2.1. Система на основе неавтономных осцилляторов ван дер Поля	376
19.2.2. Система на основе неавтономного осциллятора ван дер Поля с дополнительной цепью запаздывающей обратной связи	381

19.2.3. Аналоговое устройство с аттрактором Смейла–Вильямса. Неавтономная система.....	385
19.2.4. Аналоговое устройство с аттрактором Смейла–Вильямса. Автономная система	391
19.3. Аттрактор типа Плыкина в электронном устройстве, моделируемом в программной среде Multisim	396
19.3.1. Основные уравнения	396
19.3.2. Схема аналогового устройства и моделирование в среде Multisim	398
19.3.3. Выявление природы аттрактора	402
Глава 20. Эксперименты с электронными устройствами, имеющими аттрактор типа Смейла–Вильямса	407
20.1. Экспериментальное устройство в виде двух попеременно возбуждающихся неавтономных осцилляторов	408
20.2. Электронные устройства с запаздыванием	412
20.2.1. Система с запаздывающей обратной связью, модуляцией параметра и вспомогательным сигналом	413
20.2.2. Система с двумя петлями запаздывающей обратной связи и модуляцией параметра	417
Заключение	423
Приложения	427
А. Отображения Эно и Икеды.....	429
В. Кельтский камень	439
С. Подкова Смейла и гомоклиническое сплетение	453
Д. Размерности и формула Каплана–Йорке.....	459
Е. Модель Ханта: формальное определение	465
Список литературы	471