

В.П. Казанцев

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛИ  
ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Монография

Институт фундаментальной подготовки



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Сибирский федеральный университет

**В.П. Казанцев**

**Аналитическая электростатика на плоскости**  
**Характеристические мультиполи**  
**относительно точки и их приложения**

*Монография*

Красноярск  
СФУ  
2012

УДК 517+530.1

ББК 22.33

К 14

Рецензент: А.К. Цих, д-р физ.- мат. наук, проф.

Казанцев, В.П.

**К 14** Аналитическая электростатика на плоскости. Характеристические мультиполи относительно точки и их приложения / В.П. Казанцев.- Красноярск: Сиб. федерал. ун-т, 2012. – 747 с.  
ISBN 978-5-7638-2414-8

На базе вариационных принципов электростатики развит аппарат характеристических мультиполей кривых относительно точек, позволивший, в частности, построить конструктивное решение задачи многих тел электростатики проводников. Основы разработанного аппарата были заложены в предыдущих работах автора, обобщенных в монографии «Аналитическая электростатика на плоскости», изданной в 2008 г. Сибирским федеральным университетом.

**УДК 517+530.1**

**ББК 22.33**

ISBN 978-5-7638-2414-8

© Сибирский федеральный  
университет, 2012

© Казанцев В.П., 2012

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ

## Характеристические мультиполи относительно точки и их приложения

### Введение

Напомним, что основная идея аналитической электростатики на плоскости состоит в рассмотрении комплексного анализа как её адекватного математического аппарата. Важно отметить, что в классическом комплексном анализе понятие, аналогичное энергии электрического поля, не играет сколько-нибудь существенной роли, тогда как для аналитической электростатики оно является органическим, ибо без него нельзя дать вариационных формулировок задач электростатики и, следовательно, нельзя развить весьма эффективные прямые методы их решения. С другой стороны, понятие энергии для электростатики, как и для большинства физических теорий, является одним из главных. В классических же математических методах электростатики [1] это понятие почти не используют, поскольку опираются на классические теории поля и потенциала. В аналитической электростатике энергия электростатического поля играет центральную роль, так как служит фундаментом ее математических методов [2].

В первых частях монографии [2] были намечены основные подходы к построению аналитической электростатики, связанные с рассмотрением в неразрывном единстве электрического поля и его источников – электрических зарядов – на всей комплексной плоскости, а не в отдельных её областях, как это часто делают в математической физике.

Другой особенностью развиваемых подходов служит то обстоятельство, что конкретные электростатические задачи в аналитической электростатике формулируются как задачи о минимуме энергетических функционалов, поэтому возникает необходимость разработки методов выбора пробных функций с учетом, с одной стороны, характерных особенностей задач, а с другой – сохраняющих единство подхода к различным задачам. Соответствующие методы были описаны для некоторых классов задач электростатики проводников в первых частях монографии [2]. Их суть заключается в построении на поверхности проводника базисной системы распределений зарядов, электрические поля которых ортогональны в энергетической мере. Такие распределения зарядов, упорядоченные по отличным от нуля минимальным порядкам их круговых мультипольных моментов, получили название характеристических

мультиполей [3]. Нахождение характеристических мультиполей эквивалентно построению ортогонального базиса в функциональном пространстве электрических полей, источниками которых служат поверхностные заряды проводника, в связи с этим обстоятельством аналитическую электростатику можно трактовать как метод координат в Гильбертовом пространстве. Это делает её очень похожей на аналитическую геометрию.

Настоящая монография посвящена исследованию характеристических мультиполей кривой относительно точки, впервые введенных в работе [4] и представляющих собой распределения зарядов по кривой. Такие распределения зарядов создают в некоторой фиксированной точке комплексные потенциалы, ряды Тейлора которых в этой точке начинаются со степени, определяющей порядок соответствующего характеристического мультиполя. Электрические поля характеристических мультиполей относительно одной и той же точки различных порядков энергетически ортогональны. Таким образом, ортогональные базисы здесь определяются не только кривой, но и точкой. Это обстоятельство расширяет возможности выбора ортогональных базисов для проводников, а вместе с этим дает новые средства для решения конкретных задач.

## Оглавление

<b>Введение.....</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Возникновение понятия о характеристических мультиполях кривой относительно точки .....</b>	<b>5</b>
1.1. Характеристические мультиполи области.....	5
1.2. Преобразования характеристических мультиполей при дробно-линейных отображениях комплексной плоскости.....	8
1.3. Характеристические мультиполи прямой относительно точки .....	14
1.4. Характеристические мультиполи окружности относительно внутренней точки.....	16
1.5. Характеристические мультиполи окружности относительно внешней точки.....	19
1.6. Характеристические мультиполи низких порядков полосы относительно точки, равноотстоящей от её границ .....	21
1.7. Характеристические мультиполи луча относительно точки, лежащей на его продолжении .....	33
1.8. Характеристические мультиполи отрезка относительно точки, лежащей на его продолжении .....	36
1.9. Характеристические мультиполи дуги окружности относительно точки, лежащей на её продолжении.....	37
<b>Глава 2. Построение мультипольных базисов кривых относительно точки и использование этих базисов для решения ключевых задач электростатики.....</b>	<b>41</b>
2.1. Метод ортогонализации полей экранированных точечных мультиполей, локализованных в одной точке .....	41
2.2. Ортогонализация полей экранированных точечных мультиполей для первого квадранта .....	46
2.3. Построение характеристических мультиполей границы области относительно внутренних точек области с помощью функций, осуществляющих конформное отображение области на круг.....	53
2.4. Характеристические мультиполи параболы относительно ее фокуса .....	66
2.5. Пример построения характеристических мультиполей относительно точки для кривой четвертого порядка.....	73
2.6. Пример построения характеристических мультиполей кривой с помощью базиса характеристических мультиполей этой кривой относительно точки .....	83
2.7. Использование базиса характеристических мультиполей кривой относительно точки для решения задачи о проводнике во внешнем электрическом поле .....	94
2.8. Связь между комплексными потенциалами характеристических мультиполей относительно точки и комплексными потенциалами характеристических мультиполей окружности .....	100
2.9. Представление функции Грина суперпозицией комплексных потенциалов характеристических мультиполей и мультипольные разложения .....	105

<b>Глава 3. Конкретные примеры характеристических мультиполей</b>	
<b>бесконечных кривых относительно точки.....</b>	<b>109</b>
3.1. Построение характеристических мультиполей оси ординат относительно точки на основе конформного отображения полуплоскости на круг .....	109
3.2. Построение характеристических мультиполей низких порядков границы первого квадранта относительно точки на основе конформного отображения квадранта на круг.....	113
3.3. Характеристические мультиполи низких порядков границы полосы относительно её внутренних точек.....	119
3.4. Характеристические мультиполи низких порядков границы полуполосы относительно её внутренних точек.....	126
3.5. Характеристические мультиполи низких порядков границы сектора относительно точки .....	137
3.6. Характеристические мультиполи низких порядков параболы относительно её внешних точек .....	144
3.7. Характеристические мультиполи низких порядков параболы относительно её внутренних точек.....	159
3.8. Характеристические мультиполи низких порядков равнобочной гиперболы относительно её внутренних точек .....	167
3.9. Электростатические характеристики области, ограниченной ветвью гиперболы .....	178
3.10 Электростатические характеристики области, ограниченной двумя ветвями гиперболы .....	186
<b>Глава 4. Конкретные примеры характеристических мультиполей конечных кривых относительно точки .....</b>	<b>202</b>
4.1. Характеристические мультиполи эллипса относительно внешних точек.....	202
4.2. Характеристические мультиполи эллипса относительно внутренних точек .....	214
4.3. Характеристические мультиполи правильных многоугольников относительно их центров.....	232
4.4. Характеристические мультиполи прямоугольника относительно его центра .....	251
4.5. Характеристические мультиполи ромба относительно его центра .....	267
4.6. Характеристические мультиполи правильных звезд относительно их центров .....	277
<b>Глава 5. Характеристические мультиполи кривой относительно точки и вариационные оценки емкости экранированного провода.....</b>	<b>293</b>
5.1. Первая и вторая вариационные оценки снизу емкости экранированного провода .....	293
5.2. Оценки емкости провода кругового сечения, экранированного двумя параллельными ему взаимно перпендикулярными плоскостями .....	298
5.3. Оценки емкости провода кругового сечения, экранированного двумя параллельными ему и параллельными между собой плоскостями .....	301
5.4. Оценки емкости провода кругового сечения, экранированного двумя параллельными ему плоскостями .....	304

5.5. Оценки емкости симметричной двухпроводной линии, экранированной двумя параллельными ей и параллельными между собой плоскостями .....	307
5.6. Оценки емкости круга, экранированного параболой в её внешней области.....	312
5.7. Оценки емкости круга, экранированного параболой в её внутренней области.....	321
5.8. Оценки емкости круга, экранированного равнобочной гиперболой в её внутренней области.....	330
5.9. Оценки емкости круга, экранированного ветвью гиперболы .....	337
5.10. Оценки емкости круга, экранированного двумя ветвями гиперболы .....	347
5.11. Оценки емкости круга, экранированного вне проводящего эллипса .....	359
5.12. Оценки емкости провода, экранированного параллельной ему проводящей плоскостью.....	367
5.13. Уточнение оценок емкости провода, экранированного параллельной ему проводящей плоскостью на основе второго неравенства (5.12).....	381
5.14. Оценки емкости сечения провода, лежащего вне ветви равнобочной гиперболы .....	391

**Глава 6. Характеристические мультиполи кривой относительно точки и расчеты емкости цилиндрических конденсаторов.....404**

6.1. Вариационная схема расчета электрической емкости системы проводников, в которой последующий проводник содержит в своей полости предыдущий.....	404
6.2. Емкость окружности и охватывающего её концентрического с ней правильного многоугольника.....	414
6.3. Емкость окружности и охватывающего её концентрического с ней прямоугольника.....	424
6.4. Емкость окружности и охватывающего её концентрического с ней ромба.....	433
6.5. Емкость окружности и охватывающей её концентрической с ней правильной звезды.....	441
6.6. Характеристические мультиполи относительно точки и оценки ёмкости окружности, экранированной равнобочной гиперболой в её внутренней области, когда центр окружности лежит на оси гиперболы .....	447
6.7. Оценки емкости круга с центром на оси симметрии параболы, экранированного параболой в её внешней области .....	452
6.8. Оценки емкости круга с центром в фокусе параболы и экранированного ей.....	457

**Глава 7. Характеристические мультиполи кривой относительно точки и расчеты емкостных коэффициентов системы двух проводников .....462**

7.1. Общая схема решения задачи о емкостных коэффициентах системы двух параллельных цилиндрических проводников.....	462
7.2. Примеры точно решаемых задач о матрице емкостных коэффициентов системы двух проводников .....	467
7.3. Оценки $C^{(+)}$ снизу электрического поля полями точечных зарядов.....	485
7.4. Вариационные схемы расчета емкостных коэффициентов двух одинаковых проводников, расположенных зеркально симметрично относительно какой-либо прямой линии, их не пересекающей, путем	



аппроксимации их электрического поля полями характеристических мультиполей относительно точек.....	499
7.5. Примеры использования вариационных схем расчета емкостных коэффициентов двух одинаковых проводников, расположенных симметрично относительно какой-либо прямой линии, их не пересекающей.....	507
7.6. Вариационные схемы расчета емкостных коэффициентов двух проводников, основанные на аппроксимации их электрического поля полями характеристических мультиполей относительно точек, лежащих в областях проводников .....	528

## **Глава 8. Расчеты емкостных коэффициентов системы двух проводников с использованием различных вариационных схем..... 543**

8.1. Расчет матрицы емкостных коэффициентов системы круга и отрезка с использованием характеристических мультиполей отрезка и характеристических мультиполей круга относительно его центра .....	543
8.2. Расчет матрицы емкостных коэффициентов круга и отрезка методом аппроксимации их электрического поля полями экранированных отрезком зарядов границы круга, создающих вне круга такое же электрическое поле, как и точечные заряды, расположенные во внутренних точках круга.....	556
8.3. Расчет матрицы емкостных коэффициентов круга и квадрата .....	573
8.4. Расчеты матрицы емкостных коэффициентов системы двух проводников, состоящей из круга и прямоугольника .....	582
8.5. Расчеты матрицы емкостных коэффициентов системы двух проводников, состоящей из круга и равностороннего креста с бесконечно тонкими лучами.....	585
8.6. Расчеты матрицы емкостных коэффициентов системы двух проводников, состоящей из круга и правильной звезды.....	589
8.7. Расчеты внешнего конформного радиуса проводника, образованного двумя соприкасающимися проводниками .....	597
8.8. Оценки внешнего конформного радиуса проводника, образованного эллипсом и кругом .....	610
8.9. Оценки внешнего конформного радиуса проводника, образованного двумя правильными шестиугольниками .....	617

## **Глава 9. Характеристических мультиполи и решение задачи двух тел в электростатике проводников ..... 625**

9.1. Общая вариационная схема решения задачи о двух проводящих телах во внешнем электрическом поле .....	625
9.2. Решение задачи о двух одинаковых проводящих электрически нейтральных кругах в однородном внешнем электрическом поле.....	633
9.3. Характеристические мультиполи двух и большего числа проводников .....	641
9.4. Простые примеры построения характеристических мультиполей двух и большего числа проводников .....	652
9.5. Использование аппарата характеристических мультиполей для решения задачи двух и более тел в электростатике проводников .....	666
9.6. Комплексные функции Грина для концентрического кругового кольца и колец, конформно отображаемых на круговое кольцо .....	675

9.7. Ортогональный базис для круга, экранированного прямой, и использование этого базиса для решения основной задачи электростатики.....	688
9.8. Ортогональный базис для двух непересекающихся кругов и использование этого базиса для решения основной задачи электростатики.....	702
9.9. Емкостные коэффициенты много проводной линии из проводов кругового сечения, параллельных проводящей плоскости.....	721
<b>Заключение.....</b>	<b>732</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>733</b>