

УДК 534.222.2:533.6.011

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ДЕТОНАЦИИ В ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКАХ ГАЗА

В. А. Левин, Г. А. Скопина

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток

Исследовано распространение детонационных и ударных волн в вихревых потоках газов, начальное состояние которых характеризуется значениями давления, плотности и скорости, в общем случае являющимися функциями координаты — расстояния от оси симметрии. Рассматривается вращающееся осесимметричное течение, когда кроме продольной скорости с неоднородным профилем имеется поперечная составляющая. Анализируется возможность распространения волн детонации в режиме Чепмена — Жуге во вращающихся потоках. Получено необходимое условие существования волны Чепмена — Жуге.

Ключевые слова: вихрь, ударная волна, волна детонации, осесимметричное течение, поверхность разрыва, волна Чепмена — Жуге.

Изменение завихренности в закрученных потоках на поверхности разрыва. Рассмотрим осесимметричное закрученное течение, когда кроме продольной скорости с неоднородным профилем имеется поперечная составляющая. Такое течение для идеального совершенного газа описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{w^2}{r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u, v, w — соответствующие компоненты скорости в цилиндрической системе координат (x, r, φ) ; ρ — плотность; p — давление; t — время.

Стационарное решение системы (1) записывается в виде

$$u = u^0(r), \quad v^0 = 0, \quad w = w^0(r), \quad \rho = \rho^0(r), \quad p^0 = \int \frac{\rho^0 w^{02}}{r} dr, \tag{2}$$

при этом вектор вихря $2\omega = \text{rot } \mathbf{V}$ имеет компоненты

$$\omega_{0r} = 0, \quad \omega_{0x} = \frac{1}{2r} \frac{\partial r w^0}{\partial r}, \quad \omega_{0\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial u^0}{\partial r}.$$

Если в начальный момент времени на оси симметрии произойдет взрыв, в результате которого образуется взрывная ударная волна, или произойдет поджигание смеси с образованием волны детонации, то в потоке будет распространяться цилиндрическая ударная или детонационная волна (ДВ).

Найдем выражение для компонент вектора вихря непосредственно за поверхностью разрыва. Для этого определим величины $\partial u/\partial r$ и $\partial w/\partial r$ непосредственно за скачком при $r = R(t)$ ($R(t)$ — закон движения поверхности разрыва). Используя уравнения (1), можно получить выражения для этих производных через значения величин за скачком уплотнения и их производных по времени:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_s = -\frac{\dot{u}_1}{v_1 - \dot{R}}, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_s = -\frac{\dot{w}_1 + v_1 w_1/R}{v_1 - \dot{R}}.$$

В этих формулах точка означает дифференцирование по времени соответствующих величин на поверхности разрыва, индекс 1 относится к параметрам за скачком.

Для компонент вектора вихря за разрывом получим

$$\omega_{1\varphi} = \frac{1}{2} \frac{\dot{u}_1}{v_1 - \dot{R}}, \quad \omega_{1x} = \frac{1}{2} \left(\frac{w_1}{R} - \frac{\dot{w}_1 + v_1 w_1/R}{v_1 - \dot{R}} \right), \quad \omega_{1r} = 0.$$

Для компонент вектора вихря перед скачком имеем

$$\omega_{0\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{u}^0}{\dot{R}}, \quad \omega_{0x} = \frac{1}{2} \left(\frac{w^0}{R} + \frac{\dot{w}^0}{\dot{R}} \right).$$

На поверхности разрыва тангенциальные компоненты скорости непрерывны, т. е. $u^0 = u_1$, $w^0 = w_1$. Учитывая это обстоятельство и закон сохранения массы на скачке, получим

$$\frac{\omega_{1x}}{\omega_{0x}} = \frac{\omega_{1\varphi}}{\omega_{0\varphi}} = \frac{D}{D - v_1} = \frac{\rho_1}{\rho^0}. \quad (3)$$

Скорость распространения разрыва $\dot{R} = D$.

Из (3) непосредственно следует, что величины ω_x/ρ и ω_φ/ρ непрерывны при переходе через поверхность разрыва независимо от того, является разрыв ударной волной или волной детонации.

Таким образом, для описанного класса течений на поверхности разрыва выполняется закон сохранения величины ω/ρ , хотя сами величины ω и ρ терпят разрыв. Отметим, что завихренность потока при переходе через скачок возрастает пропорционально отношению плотностей. Следовательно, при одной и той же скорости скачка завихренность за ударной волной выше, чем за ДВ.

Этот вывод справедлив и для плоского сдвигового течения.

Возможность распространения ДВ во вращающихся потоках в режиме Чепмена — Жуге. Рассмотрим распространение расходящейся волны детонации в закрученных потоках газа с начальным распределением параметров (2). Детонационная волна рассматривается как поверхность разрыва, на которой при сгорании единицы массы газа выделяется тепло Q , величина которого также зависит от координаты $Q = Q(r)$. Течение за фронтом детонации описывается уравнениями Эйлера (1).

На фронте ДВ, распространяющейся в режиме Чепмена — Жуге, выполняются следующие соотношения [1]:

$$\begin{aligned} \rho_J &= \rho^0 \frac{\gamma + 1}{\gamma + q_J}, & p_J &= p^0 \frac{\gamma + q_J}{(\gamma + 1)q_J}, & v_J &= D_J \frac{1 - q_J}{\gamma + 1}, \\ u_J &= u^0, & w_J &= w^0, & D_J^2 &= \frac{a^{02}}{q_J}, & a^{02} &= \gamma \frac{p^0}{\rho^0}, & a_J^2 &= \frac{\gamma p_J}{\rho_J}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$q_J^2 - 2q_J[1 + (\gamma^2 - 1)Q/a^{02}] + 1 = 0.$$

Здесь индексом J обозначены параметры газа и скорость волны в режиме Чепмена — Жуге. Система уравнений газовой динамики, будучи гиперболической, имеет три семейства характеристик, на которых выполняются соответствующие характеристические соотношения [1]. Если при этом на некоторой достаточно гладкой линии $r_0(t)$ значения функций удовлетворяют одному из характеристических соотношений, но не удовлетворяют другому соотношению на характеристике, то эта линия является огибающей соответствующего семейства характеристик системы уравнений (1) и решение в ее окрестности следует искать в виде

$$p(r, t) = p_0(t) + p_1(t) \sqrt{r_0(t) - r} + p_2(t)(r_0(t) - r) + p_3(t)(r_0(t) - r)^{3/2} + \dots \quad (5)$$

(аналогично для всех остальных искомых параметров) [1].

Этот подход использовался для определения условий существования плоских детонационных волн Чепмена — Жуге во внешних электрических и магнитных полях [2], а также для анализа распространения ДВ в неоднородных средах [3]. Для произвольных систем квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка исследованы условия существования и определен вид асимптотического разложения решения в окрестности огибающей характеристических поверхностей, на которой заданы начальные значения функций [4]. Сходимость соответствующих рядов доказана в [5].

Если подставить разложения (5) в систему уравнений (1), то получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения. Часть ее для коэффициентов с индексами 0, 1 и 2 имеет вид

$$\rho_1(D - v_0) - \rho_0 v_1 = 0, \quad p_1 - \rho_0(D - v_0)v_1 = 0, \quad \rho_0 p_1 - \gamma p_0 \rho_1 = 0, \quad (6)$$

$$u_1(D - v_0) = 0, \quad w_1(D - v_0) = 0;$$

$$\rho_2(D - v_0) - \rho_0 v_2 = \rho_1 v_1 - \dot{\rho}_0 - \rho_0 v_0 / r_0,$$

$$\rho_0 v_2(D - v_0) - p_2 = \rho_0 w_0^2 / r_0 - \rho_0 \dot{v}_0, \quad (7)$$

$$(D - v_0)(\rho_0 p_2 - \gamma p_0 \rho_2) = \gamma p_0 \dot{\rho}_0 - \rho_0 \dot{p}_0 + (\gamma - 1)\rho_0 p_1 v_1 / 2,$$

$$u_2(D - v_0) = -\dot{u}_0, \quad w_2(D - v_0) = -\dot{w}_0 - v_0 w_0 / r_0.$$

Здесь дифференцирование по t обозначено точкой, а $D = \dot{r}_0$. Так как ДВ распространяется в режиме Чепмена — Жуге, то $D - v_0 = a_0$, т. е. выполняется характеристическое соотношение [1]. Отсюда следует, что определители систем (6) и (7), а также систем всех последующих приближений для нахождения коэффициентов разложения v_k , ρ_k , p_k равны нулю.

Коэффициенты разложения u_k и w_k находятся сразу по известным значениям предыдущих коэффициентов, причем $u_1 = w_1 = 0$. Поэтому разложение в ряд для скоростей u и w имеет вид $u = u_0 + u_2(\dot{r}_0 - r) + u_3(\dot{r}_0 - r)^{3/2} + \dots$

Для совместности линейной системы уравнений (7) и всех последующих необходимо равенство нулю расширенного определителя системы. Из этого условия следует соотношение

$$\frac{\gamma - 1}{2} \rho_0 p_1 v_1 - \rho_0 \dot{p}_0 + \gamma p_0 \rho_1 v_1 + \rho_0^2 (D - v_0) \left(\frac{w_0^2}{r_0} - \dot{v}_0 \right) - \frac{\gamma p_0 \rho_0 v_0}{r_0} = 0,$$

из которого с учетом (6) находим

$$\rho_1^2 = \frac{2\rho_0^3}{\gamma(\gamma + 1)p_0} \left[\dot{v}_0 - \frac{w_0^2}{r_0} + (D - v_0) \left(\frac{v_0}{r_0} + \frac{\dot{p}_0}{\gamma p_0} \right) \right].$$