

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ
И СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ЯДРОМ КОШИ**

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
В.Е. Петрова, С.Н. Медведев,
О.А. Медведева

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

Содержание

1 Краевая задача Римана – Гильберта.	
Некоторые вспомогательные теоремы и понятия	4
1.1 Принцип непрерывности. Продолжение по симметрии	4
1.2 Принцип аргумента. Обобщенная теорема Лиувилля	8
1.3 Индекс	10
2 Задача Римана – Гильберта для односвязной области	14
2.1 Постановка задачи. Отыскание кусочно-аналитической функции по заданному скачку	14
2.2 Каноническая функция. Решение задачи	16
3 Задача Римана – Гильберта для полуплоскости	26
4 Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши. Основные понятия	29
4.1 Сингулярное интегральное уравнение	30
4.2 Интегральные уравнения Фредгольма	32
5 Решение характеристического уравнения	35
5.1 Сведение к краевой задаче Римана – Гильберта	35
5.2 Решение уравнения	37
5.3 Решение уравнения, союзного характеристическому	40
6 Сингулярные интегральные уравнения, разрешимые в замкнутой форме	44
7 Уравнение на действительной оси	48
7.1 Исчезающие на бесконечности решения	48
7.2 Решение в классе ограниченных на бесконечности функций	51

аналитического продолжения, а для образования кусочно-аналитической функции.

Аналитическое доопределение по симметрии. Пусть D_z — некоторая область плоскости z , L_z — прямая или окружность, имеющие с контуром области D_z некоторую общую часть. Множество точек, симметричных точкам D_z относительно L_z , образуют область, которую обозначим D_z^* и назовем областью, симметричной D_z относительно L_z . Пусть, далее, $\omega = f(z)$ — функция, аналитическая в D_z , отображающая ее в некоторую область D_ω ; L_ω — произвольная прямая или окружность в плоскости ω и D_ω^* — область, симметричная D_ω относительно L_ω . Определим в D_z^* функцию $\omega = f^*(z)$, ставя в соответствие точкам z^* , симметричным z , значения ω^* , симметричные значениям $\omega = f(z)$; в частности, если L_z и L_ω — действительные оси, то

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} = \bar{f}(z).$$

Лемма. *Функция $\omega = f^*$ аналитична в области D_z^* .*

Приведем здесь доказательство, основанное на свойствах интеграла типа Коши.

Пользуясь круговым свойством дробно-линейных преобразований, сделаем в плоскостях z и ω дробно-линейные преобразования такие, что L_z , L_ω переходят соответственно в отрезки действительных осей z и ω . В силу свойства инвариантности симметричных точек при дробно-линейном преобразовании точки, симметричные относительно L_z , L_ω , перейдут в точки, симметричные относительно действительных осей плоскостей z и ω . Таким образом, дело сводится к случаю, когда парами симметричных точек будут (z, \bar{z}) и $(\omega, \bar{\omega})$. Для доказательства аналитичности $f^*(z)$ воспользуемся интегралом Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_z} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

По определению

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_z} \frac{\overline{f(\tau)}}{\bar{\tau} - z} d\bar{\tau}.$$

Заменим под знаком интеграла τ на $\bar{\tau}$ и $\overline{f(\bar{\tau})}$ на f^* . При этом контур L_z перейдет в L_z^* , проходимый в отрицательном направлении. Получим

$$f^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_z^*} \frac{f^*(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

т.е. $f^*(z)$ представляется интегралом Коши, следовательно, аналитична.

Функция

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_z, \\ f^*(z), & z \in D_z^*, \end{cases}$$

является кусочно-аналитической в совокупности областей D_z, D_z^* .

Перейдем теперь к установлению принципа симметрии в обычной формулировке.

Теорема (принцип симметрии). Пусть функция $\omega = f(z)$ аналитична в области D_z , имеющей частью своей границы отрезок прямой или дугу окружности, и отражает область D_z в некоторую область D_ω так, что указанные отрезок или дуга снова переходят в отрезок прямой или дугу окружности. Тогда функция $f^*(z)$, определенная по симметрии в области D_z^* , будет аналитическим продолжением функции $f(z)$ в области D_z^* .

Рассуждая, как при доказательстве леммы, можно свести рассмотрение к случаю, когда отрезок действительной оси плоскости z отображается на отрезок действительной оси плоскости ω . В силу леммы $f^*(z)$ аналитична в D_z^* . Когда z стремится к точке действительной оси, то и симметричная ей точка \bar{z} стремится к той же точке оси. По определению симметрии и условию теоремы ω и $\bar{\omega}$ стремятся к одной и той же точке действительной оси плоскости ω . Следовательно, граничные значения $f(z)$ и $f^*(z)$ совпадают. Условия принципа непрерывности выполнены, и теорема доказана.

Понятие симметрии может быть значительно обобщено. Пусть L — аналитическая кривая, определяемая параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где φ, ψ — аналитические функции действительного параметра t . Равенство $z = \varphi(t) + i\psi(t)$ при t действительном определяет точку кривой L , при комплексном t оно задает некоторую точку комплексной плоскости, не принадлежащую L . Заменив t на \bar{t} , получим точку $z^* = \varphi(\bar{t}) + i\psi(\bar{t})$, симметричную по определению точке z относительно L . Возьмём в последнем выражении сопряжённое значение и присоединим к нему выражение для z . Решая систему, получим

$$\varphi(t) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}^*), \psi(t) = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}^*).$$

Если уравнение кривой L задано в неявной форме уравнением $f(x, y) = 0$, то для определения точки z^* , симметричной z относительно кривой L , получим уравнение

$$f\left[\frac{1}{2}(z^* + \bar{z}), \frac{1}{2i}(z^* - \bar{z})\right] = 0.$$

Для произвольной аналитической кривой алгоритм построения симметричных точек не изучен. Для более частного случая алгебраической кривой он разработан.

1.2 Принцип аргумента. Обобщенная теорема Лиувилля

Пусть в области D , ограниченной контуром L , функция $f(z)$ аналитична, за исключением конечного числа точек, где она может иметь полюсы. Выпишем разложение в ряд в окрестности некоторой точки z_0 :

$$f(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots = (z - z_0)^n f_1(z),$$

$$f_1(z_0) = c_n \neq 0.$$

Число n называется *порядком функции в точке z_0* . Если $n > 0$, то порядок функции есть порядок ее нуля, если $n < 0$, то порядок ее есть порядок полюса с противоположным знаком. Если порядок функции в z_0

есть нуль, то в такой точке функция принимает конечное, отличное от нуля, значение. При рассмотрении бесконечно удаленной точки бином $z - z_0$ нужно заменить на $\frac{1}{z}$. Если точка z_0 лежит на контуре L , то порядком функции будем считать число $n/2$.

Пусть $N_D, P_D; N_L, P_L$ соответственно числа нулей и полюсов в области и контуре, причем каждый из них берется столько раз, какова его кратность. Символом $[\omega]_L$ обозначим приращение величины ω при обходе контура в положительном направлении. Положительным обходом, как всегда, считается тот, при котором рассматриваемая область остается слева. Сформулируем теорему, называемую *принципом аргумента*.

Принцип аргумента. Пусть $f(z)$ есть функция, аналитическая и однозначная в многосвязной области D , ограниченной гладким контуром $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$, за исключением конечного числа точек, где она может иметь полюсы, непрерывная в замкнутой области $D \cup L$ и имеет на контуре не более чем конечное число нулей целого порядка. Тогда справедлива формула

$$N_D - P_D + \frac{1}{2}(N_L - P_L) = \frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_L.$$

Обобщенный принцип аргумента. Пусть $f(z)$ аналитична в D , за исключением конечного числа точек, где она имеет полюсы, и непрерывно продолжима на контур всюду, кроме точек t_k в окрестности которых она представима в виде

$$f(z) = f_k(z)(z - t_k)^{\lambda_k} \ln^{\mu_k}(z - t_k) (k = 1, 2, \dots, n),$$

где $f_k(z) \neq 0$, λ_k, μ_k — некоторые, вообще говоря, комплексные постоянные.

Тогда

$$N_D - P_D + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k \operatorname{Re} \lambda_k = \frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_L,$$

где α_k — угол между касательными векторами в угловой точке.

Теорема Лиувилля (обобщенная). Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек $a_0 = \infty, a_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), где она имеет полюсы, причем главные части разложений функции $f(z)$ в окрестности полюсов имеют вид

$$G_0(z) = c_1^0 z + c_2^0 z^2 + \dots + c_{m_0}^0 z^{m_0}$$

в точке a_0 ,

$$G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) = \frac{c_1^k}{z - a_k} + \frac{c_2^k}{(z - a_k)^2} + \dots + \frac{c_{m_k}^k}{(z - a_k)^{m_k}}$$

в точке a_k .

Тогда функция $f(z)$ есть рациональная функция и может быть представлена формулой

$$f(z) = c + G_0(z) + \sum_{k=1}^n G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right).$$

В частности, если единственная особенность функции $f(z)$ есть полюс порядка m в бесконечно удаленной точке, то $f(z)$ есть многочлен степени m :

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m.$$

1.3 Индекс

Определение и основные свойства

Пусть L — гладкий замкнутый контур и $G(t)$ — заданная на нем непрерывная функция, не обращающаяся в нуль.

Определение. Индексом \varkappa функции $G(t)$ по контуру L называется разделенное на 2π приращение ее аргумента при обходе кривой L в положительном направлении:

$$\varkappa = \text{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_L. \quad (1.1)$$