МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебно-методическое пособие

Составители:
Л. Н. Баркова,
Л. В. Безручкина

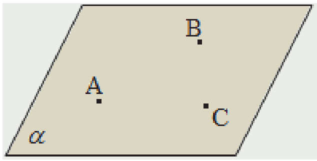
Воронеж
Издательский дом ВГУ
2019

Содержание

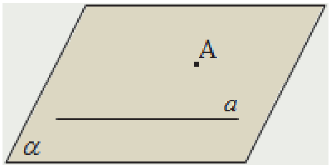
Способы определения плоскости

Плоскость в пространстве обычно задается:

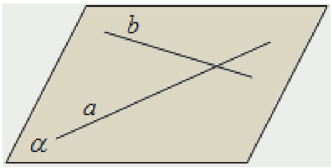
– тремя точками, лежащими на одной прямой:



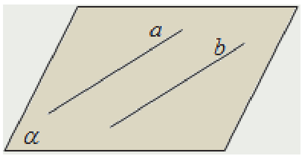
– прямой и точкой, не лежащей на этой прямой:



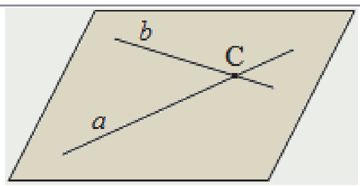
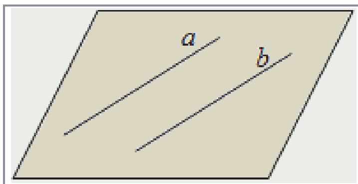
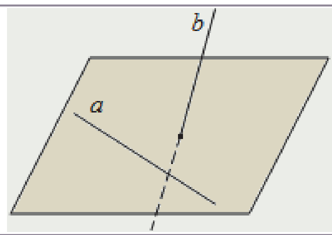
– двумя пересекающимися прямыми:



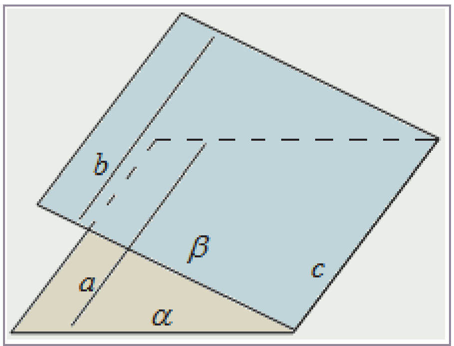
– двумя параллельными прямыми:



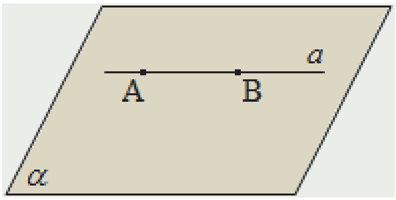
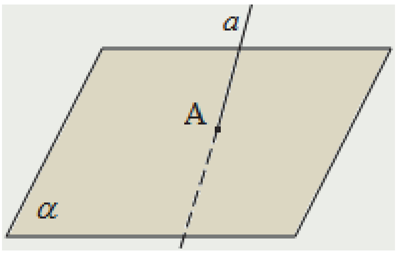
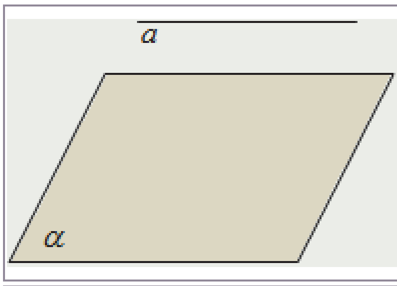
Прямые в пространстве

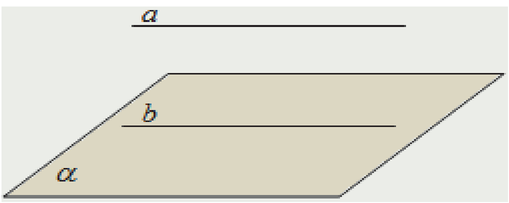
		
Две прямые в пространстве пересекаются, если они имеют лишь одну общую точку: $a \cap b = C$	Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются: $a \| b$	Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если не существует плоскости, которой эти прямые принадлежат

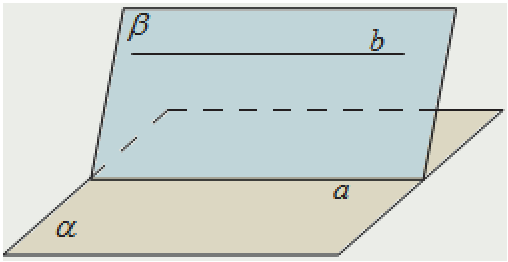
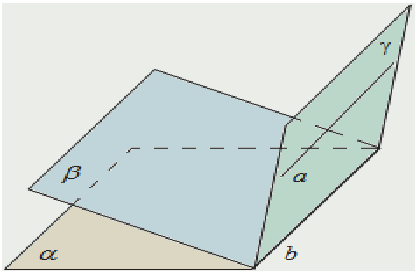
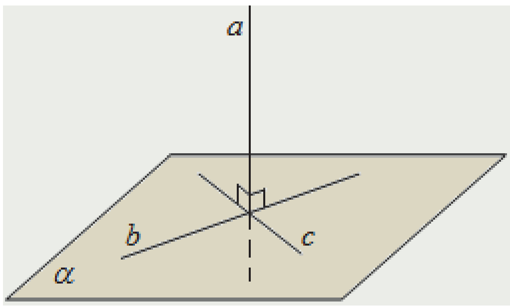
Признак параллельности прямых

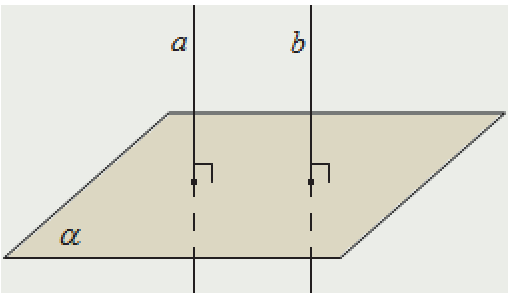
	Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой: $a \parallel c,\ b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$

Прямая и плоскость в пространстве

		
Если каждая точка прямой принадлежит плоскости, то говорят, что и прямая принадлежит плоскости: $a \in \alpha$. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости: $A \in \alpha,\ B \in \alpha \Rightarrow a \in \alpha$	Говорят, что прямая и плоскость пересекаются, если они имеют одну единственную общую точку: $a \cap \alpha = A$. Точку A называют точкой пересечения прямой и плоскости или следом прямой a на плоскости α	Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек: $a \parallel \alpha$. Плоскость и не лежащая на ней прямая либо пересекаются (в одной точке), либо не пересекаются (параллельны)

	*Признак параллельности прямой и плоскости:* Прямая, не лежащая в плоскости, параллельна этой плоскости тогда и только тогда, когда она параллельна некоторой прямой в этой плоскости: $a \notin \alpha,\ \exists b \in \alpha,\ a \parallel b \Leftrightarrow a \parallel \alpha$

	*Признак параллельности прямых*: Если прямая b параллельна плоскости α, а плоскость β проходит через b и пересекает плоскость α по прямой a, то прямые a и b параллельны: $b \parallel \alpha,\ \alpha \cap \beta = a \Rightarrow a \parallel b$
	*Признак параллельности прямых*: Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии пересечения этих плоскостей: $a \parallel \alpha,\ a \parallel \beta,\ \alpha \cap \beta = b\ \Rightarrow a \parallel b$
	Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения этой прямой и плоскости. Через любую точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну. *Признак перпендикулярности прямой и плоскости:* Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости: $b \in \alpha,\ c \in \alpha,\ a \perp b,\ a \perp c\ \Rightarrow\ a \perp \alpha$

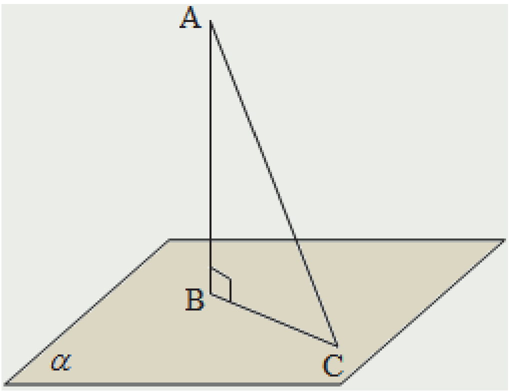


Плоскость, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и другой прямой:

$$a \perp \alpha,\ a \parallel b \ \Rightarrow\ b \perp \alpha.$$

Прямые, перпендикулярные одной плоскости, – параллельны:

$$a \perp \alpha,\ b \perp \alpha \ \Rightarrow\ a \parallel b$$



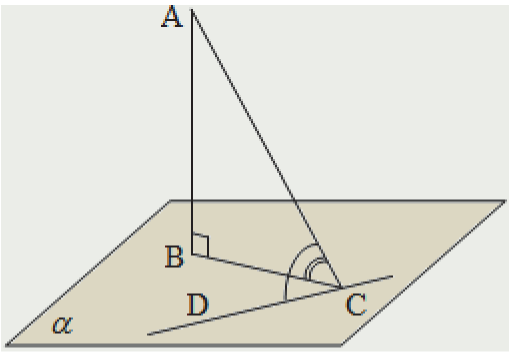
Перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, которые соединяет эту точку с точкой плоскости (основанием перпендикуляра) и лежит на прямой, которая перпендикулярна плоскости. Длину перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной плоскости, считают расстоянием между этими точкой и плоскостью.

Наклонной, проведенной из данной точки к плоскости, называется любой отрезок, который соединяет эту точку с точкой плоскости (основанием наклонной) и не является перпендикуляром, проведенным к этой плоскости.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных к плоскости из одной точки, называется проекцией (ортогональной проекцией) этой наклонной на плоскость.

AB – перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α;

AC – наклонная, проведенная из точки

	А к плоскости α; B – основание перпендикуляра АB; C – основание наклонной АC; BC – проекция наклонной АC на плоскость α. *Свойства перпендикуляра и наклонной:* • перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости, короче любой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости; • равные наклонные, проведенные из данной точки к плоскости, имеют равные проекции; и наоборот: равным проекциям соответствуют равные наклонные; • из двух наклонных, проведенных из данной точки к одной плоскости, больше та, проекция которой больше
 	Углом между наклонной и плоскостью называется величина угла между наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость: ∠ACB – угол между наклонной AC и плоскостью α. Угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой, проходящей в этой плоскости через основание наклонной: $\angle ACB < \angle ACD$

ŋqdqʎəʏ bƎ dəqƎbʏзə d ɛɑαɓɔʎ ɟqdqʏqʎè