МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

И.Л. Каширина, К.В. Чудинова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

Оглавление

ŋqdqyɐʎ bƎ dəbƎbʎɜə d ɐɔɑbɔʎ Ɉqdqʎqyè

Пример. Бросается игральная кость, «Выпадет число от 1 до 6» – достоверное событие.

События называются совместными, если наступление одного из них не исключает наступление другого. События А и В называются несовместными, если их произведение – невозможное событие.

Пример. Бросается игральная кость. События «выпадет 3» и «выпадет четное» – несовместны, а «выпадет 4» и «выпадет четное» – совместны.

События являются равновозможными, если по условиям эксперимента ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другие.

Пример. Бросается игральная кость, «выпадет 1», «выпадет 2»…«выпадет 6» - равновозможные события.

Действия над событиями

Суммой событий А и В называется событие А+В, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из этих двух событий. Событие А+В состоит из тех элементарных исходов, которые входят хотя бы в одно из событий А или В.

Пример. А – четное число очков; В – кратное 3; А+В = {2,3,4,6}.

Произведением событий А и В называется событие А*В, заключающееся в том, что события А и В произошли одновременно. А*В содержит только те исходы, которые одновременно входят как в А, так и в В.

Пример. Для предыдущего примера А*В = {6}.

Разностью двух событий А и В называется событие А\В, когда событие А произошло, а В – нет.

Пример. Для предыдущего примера А\В = {2,4}.

Отрицанием события А называется событие $\overline{A}$, которое заключается в том, что событие А не произошло. $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Говорят, что событие А включено в событие В (А ⊂ В), если появление события А влечет за собой появление события В. Все исходы, входящие в А обязательно входят и в В.

Задача 1. Два человека играют в шахматы. Событие А – «выиграл первый». Событие В – «выиграл второй». Сформулируйте словами следующие события:

а) $\overline{B}$; б) $\overline{A}\Delta B$; в) $\overline{A}+\overline{B}$.

Задача 2. Из таблицы целых чисел взято случайное число. Событие $A -$ «число делится на 5». Событие $B -$ «число оканчивается на 0». Найти $A\overline{B}, A-B$.

Задача 3. Событие A – «хотя бы одно из четырех изделий бракованное». Событие B – «из четырех изделий не менее двух бракованные». Найти события $\overline{B}, \overline{A}$.

Задача 4. Рабочий изготовил n деталей. Событие A_i – «i-я деталь имеет дефект». С помощью операций над событиями запишите события: а) «хотя бы одна деталь имеет дефект»; б) «ни одна из деталей не имеет дефектов».

Классическое определение вероятности

Классическое определение вероятности применяется в том случае, когда пространство элементарных исходов Ω конечно, и все исходы, входящие в него, равновозможны.

Вероятностью события А называется число Р(А) = $\frac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих событию А, n – общее число исходов.

Свойства, вытекающие из классического определения вероятности:

1) $P(A) \geq 0$ для любого события А;
2) вероятность достоверного события $P(\Omega) = 1$;
3) $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если события А и В несовместны.

Докажем, например, свойство 3. Пусть n – общее число исходов, m_1–

число исходов, благоприятствующих А, m_2 – число исходов, благоприятствующих В. Тогда событию $A+B$ будет благоприятствовать m_1+m_2 исходов (так как среди них нет общих). Тогда

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

Пример. Студент выучил 20 из 25 вопросов к экзамену. Билет содержит 3 вопроса. Какова вероятность, что он ответит на них верно?

Решение. $\mathrm{P(A)} = \mathrm{C}_{20}^3/C_{25}^3 = \frac{3*19}{23*5} = 0.496$

Задача 1. Для участия в лотерее нужно на карточке отметить 6 чисел из 49. Какова вероятность выигрыша, если для этого необходимо угадать все 6 цифр?

Задача 2. Из карточек с буквами, образующими слово «мастер», выбирают 4. Найти вероятность того, что получится слово «тема».

Задача 3. Четырем детям на новый год приготовили подарки, но Дед Мороз их перепутал и вручил в случайном порядке. Какова вероятность того, что каждому ребенку достанется его подарок?

Задача 4. В классе учится 20 учеников. Для дежурства после уроков нужно выбирать троих. Какова вероятность того, что выберут первых трёх человек по списку?

Задача 5. Шифр кодового замка состоит из 4 цифр. Злоумышленник пытается открыть замок, не зная шифра. Какова вероятность того, что он откроет замок с первого раза?

Задача 6. В коробке лежат m белых шаров и n черных. Из нее по очереди вытаскивают 2 шара. Найти вероятность того, что оба – белые.

Задача 7. В выпуклом многоугольнике 20 вершин, случайным образом выбирают 2 вершины и соединяют их прямой линией. Найти вероятность того, что эта линия – диагональ.

Задача 8. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Найти вероятность

ђqqdyeҮ bӺ dәqӺbүзә d eaqcyҾ ӡqqdүqүә

того, что все цифры в нем различные.

Задача 9. На библиотечной полке стоит 15 книг, 5 из них – в переплете. С полки берут 3 книги. Найти вероятность того, что они все будут в переплете.

Задача 10. В коробке лежит 20 шаров с номерами от 1 до 20. Наугад выбирают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них есть шары с номерами 1 и 2.

Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности обобщает классическое определение на случай бесконечного числа исходов в случае, если пространство элементарных исходов Ω является подмн-вом $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$, при этом рассматриваются только такие подмножества, которые имеют конечную меру, а вероятность выбора точки, принадлежащей любому подмножеству A множества Ω, зависит только от меры этого подмножества и не зависит от его расположения внутри Ω. В качестве меры в $\mathbb{R}$ используется длина; в $\mathbb{R}^2$ – площадь; в $\mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ – объем.

Вероятностью события A называется число P(A) = $\frac{M(A)}{M(\Omega)}$, равное отношению меры множества A к мере множества Ω.

Свойства, вытекающие из геометрического определения вероятности:

4) $P(A) \geq 0$ для любого события A;
5) вероятность достоверного события $P(\Omega) = 1$;
6) $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если события A и B несовместны.

Пример (Задача о встрече). P и D договорились встретиться в определенном месте между 6 и 7 часами вечера. Необходимо найти вероятность их встречи, если они могут появиться на этом месте в течении данного часа случайным образом, причем P сможет подождать 20 минут, а D – 5 минут.

Решение. Обозначим через x – через сколько минут после начала часа пришел P; y – через сколько минут после начала часа пришел D. $0 \leq x, y \leq 60$. Тогда, чтобы P и D встретились, необходимо выполнение условий:

$$\begin{cases} y - x \leq 20 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$$

Графически область пересечения данных неравенств изображена на рис.1.

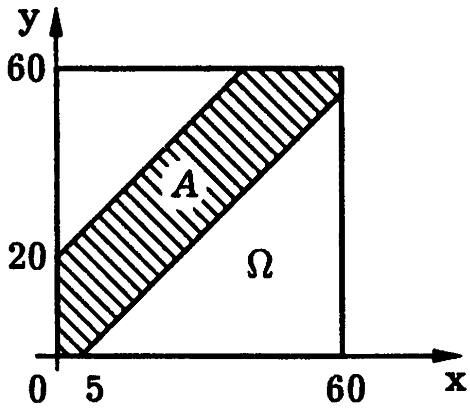

Рис. 1. Задача о встрече.

$M(\Omega) = 3600,\ M(A) = 3600 - \frac{40^2}{2} - \frac{55^2}{2} = 1287.5\,;\ P(A) = \frac{1287{,}5}{3600} = 0.353$

Задача 1. Из отрезка [0; 2] выбирают случайным образом два числа. Какова вероятность, что их сумма больше единицы?

Задача 2. Выбирают 2 числа из отрезка $[0;1]$. Определите вероятность того, что их произведение меньше 0.5.

Задача 3. Два человека договорились о встрече. Они приходят на место встречи в интервале от 0 до T часов и ждут в течение времени $\tau < T$. Какова вероятность того, что они встретятся?

Задача 4. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a бросается монета радиуса $r < \frac{a}{2}$. Определить вероятность того, что:

а) монета попадает целиков внутрь одного квадрата;

б) монета пересечет не более одной стороны квадрата.

Задача 5. Внутри квадрата с вершинами $(0;0), (0;1), (1;0), (1;1)$ наудачу выбирают точку M с координатами (x, y). Найти вероятность события $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2, a > 0\}$.