

УДК 519.8  
ББК 22.18  
Б88

**Р е ц е н з е н т ы :**

доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный  
сотрудник НИИ робототехники и процессов управления  
Южного федерального университета *А. Н. Каркищенко*;  
доктор технических наук, профессор Отделения интеллектуальных  
кибернетических систем Обнинского института атомной энергетики  
НИЯУ МИФИ *Б. И. Яцало*

**Броневи́ч, Андрей Георгиевич.**

**Б88** Нечеткие модели анализа данных и принятия решений : учебное пособие /  
А. Г. Броневи́ч, А. Е. Лепский ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономи-  
ки». — Эл. изд. — 1 файл pdf : 266 с. — Москва : Изд. дом Высшей школы эконо-  
мики, 2022. — Систем. требования: Adobe Reader XI либо Adobe Digital Editions  
4.5 ; экран 10". — Текст : электронный.

ISBN 978-5-7598-2407-7

В учебном пособии рассмотрены такие основные разделы теории нечетких множеств, как нечеткие отношения, нечеткие числа, нечеткий логический вывод, а также прикладные разделы, связанные с применением нечеткой математики в анализе данных (нечеткая регрессия, нечеткая кластеризация, нечеткая классификация) и принятии решений (нечеткая оптимизация, многокритериальные методы принятия решений с нечеткими данными, ранжирование нечетких данных, нечеткое моделирование). Каждая глава заканчивается разделом задач для самостоятельного решения. Поэтому данное пособие можно использовать не только как учебник, но и как задачник на семинарских занятиях или для самостоятельной подготовки. Учебное пособие адресовано студентам, обучающимся по образовательным программам, связанным с анализом данных и принятием решений («Прикладная математика и информатика», «Экономика», «Экономика и статистика», «Бизнес-информатика» и др.).

Книга также будет полезна аспирантам и преподавателям образовательных программ, как непосредственно связанных с анализом данных, так и использующих анализ данных и принятие решений в своих исследованиях, — бизнес-информатикам, экономистам, финансовым аналитикам, политологам и т.д.

УДК 519.8  
ББК 22.18

**Электронное издание на основе печатного издания:** Нечеткие модели анализа данных и принятия решений : учебное пособие / А. Г. Броневи́ч, А. Е. Лепский ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — Москва : Изд. дом Высшей школы экономики, 2022. — 264 с. — ISBN 978-5-7598-2317-9. — Текст : непосредственный.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации.

ISBN 978-5-7598-2407-7

© Броневи́ч А. Г., Лепский А. Е., 2022

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие.....</b>	<b>8</b>
<b>Глава 1. Нечеткие множества и операции над ними .....</b>	<b>15</b>
1.1. Понятие нечеткого множества .....	15
1.2. Алгебраические операции над нечеткими множествами и их свойства .....	20
1.3. Методы построения функций принадлежности нечетких множеств.....	22
1.4. Задачи .....	33
<b>Глава 2. Метрики на нечетких множествах и степень нечеткости .....</b>	<b>37</b>
2.1. Метрики на нечетких множествах .....	37
2.2. Степень размытия нечеткого множества.....	39
2.3. Применения степени размытия .....	45
2.3.1. <i>Применение степени размытия в задачах обработки                 изображений.....</i>	<i>45</i>
2.3.2. <i>Применение степени размытия для анализа согласованности                 позиций экспертов в задачах принятия решений .....</i>	<i>50</i>
2.4. Задачи .....	53
<b>Глава 3. Обобщение операций над нечеткими множествами .....</b>	<b>56</b>
3.1. Понятия треугольной нормы и конормы .....	56
3.2. Треугольные нормы и копулы .....	60
3.3. Нечеткое отрицание.....	61
3.4. Функциональное описание треугольных норм и инвертора .....	61
3.5. Задачи .....	63

<b>Глава 4. Нечеткие отношения</b> .....	65
4.1. Понятие нечетких отношений и операции над ними.....	65
4.2. Бинарное нечеткое отношение на декартовом квадрате .....	69
4.3. Специальные виды бинарных нечетких отношений .....	73
4.3.1. <i>Нечеткие отношения порядка</i> .....	73
4.3.2. <i>Нечеткие отношения подобия и различия</i> .....	75
4.3.3. <i>Нечеткое отношение сходства</i> .....	76
4.4. Кейс: анализ нечеткого отношения согласованности рекомендаций финансовых аналитиков .....	78
4.5. Задачи .....	80
<b>Глава 5. Принцип обобщения и нечеткие числа</b> .....	83
5.1. Функция принадлежности сложных нечетких множеств .....	83
5.2. Понятие нечетких чисел и операции над ними .....	87
5.3. Нечеткие функции, уравнения, системы.....	97
5.4. Задачи .....	104
<b>Глава 6. Числовые характеристики и расстояние между нечеткими числами</b> .....	107
6.1. Числовые характеристики нечетких чисел .....	107
6.2. Метрики на множестве нечетких чисел.....	110
6.2.1. <i>Метрики на основе расстояний между <math>\alpha</math>-срезами нечетких                 чисел</i> .....	110
6.2.2. <i>Метрики на основе расстояний между функциями,                 описывающими нечеткие числа</i> .....	112
6.2.3. <i>Расстояния на основе числовых характеристик нечетких                 чисел</i> .....	113
6.2.4. <i>Нечеткое расстояние между нечеткими числами</i> .....	114
6.2.5. <i>Расстояние между дискретными нечеткими числами                 на основе решения транспортной задачи</i> .....	116
6.3. Задачи .....	119

<b>Глава 7. Сравнение нечетких чисел</b> .....	121
7.1. Сравнение случайных величин .....	121
7.2. Сравнение нечетких чисел с помощью индекса ранжирования .....	124
7.3. Ранжирование нечетких чисел, основанное на сравнении с эталоном .....	127
7.4. Ранжирование нечетких чисел, основанное на вычислении индекса парного сравнения .....	129
7.5. Некоторые кейсы применения нечетких чисел .....	133
7.5.1. Применения нечетких чисел в сетевом анализе .....	133
7.5.2. Применения нечетких моделей к прогнозированию волатильности .....	140
7.6. Задачи .....	143
<b>Глава 8. Некоторые обобщения понятия нечеткого множества</b> .....	145
8.1. Интервальнозначные нечеткие множества и нечеткие множества 2-го типа.....	145
8.2. Интуиционистские нечеткие множества .....	147
8.3. Нечеткие случайные величины .....	151
8.4. Эпистемологическая и онтологическая точки зрения на понятие нечеткого множества .....	153
8.5. Задачи .....	154
<b>Глава 9. Нечеткая оптимизация</b> .....	157
9.1. Неразмывтые и нечеткие задачи оптимизации.....	157
9.2. Нечеткое линейное программирование.....	162
9.3. Задачи .....	165
<b>Глава 10. Нечеткая регрессия</b> .....	167
10.1. Задача регрессии. Метод наименьших квадратов .....	167

10.2. Линейная регрессия с нечеткими параметрами. Возможностная модель .....	170
10.3. Линейная регрессия с нечеткими данными. Метрическая модель .....	175
10.4. Задачи .....	179
<b>Глава 11. Многокритериальное принятие решений при нечетких данных .....</b>	<b>181</b>
11.1. Общая постановка задачи многокритериального принятия решений при нечетких данных .....	181
11.2. Модель взвешенной суммы .....	183
11.3. Модель взвешенного произведения .....	188
11.4. Метод TOPSIS .....	189
11.5. Задачи .....	194
<b>Глава 12. Нечеткая классификация и кластеризация .....</b>	<b>196</b>
12.1. Нечеткая классификация .....	196
12.1.1. Постановка задачи классификации .....	196
12.1.2. Нечеткая классификация: нечеткие классы и четкие образы .....	197
12.1.3. Нечеткая классификация: нечеткие классы и нечеткие образы ....	203
12.2. Нечеткая кластеризация .....	207
12.2.1. Неразмытая кластеризация. Алгоритм <i>k</i> -средних .....	207
12.2.2. Нечеткая кластеризация. Нечеткий алгоритм <i>c</i> -средних .....	208
12.2.3. Нечеткий алгоритм Густафсона — Кесселя .....	211
12.2.4. Возможностный нечеткий алгоритм <i>c</i> -средних .....	213
12.3. Задачи .....	215
<b>Глава 13. Элементы нечеткого логического вывода .....</b>	<b>217</b>
13.1. Логические неразмытые и нечеткие высказывания .....	217
13.2. Нечеткая импликация .....	218

13.2.1. Определение нечеткой импликации через нечеткие замещения логических связей.....	218
13.2.2. Аксиоматическое определение нечеткой импликации.....	221
13.3. Нечеткие и лингвистические переменные .....	221
13.4. Нечеткие высказывания .....	224
13.5. Нечеткие правила дедуктивного вывода.....	225
13.6. Нечеткое моделирование.....	234
13.7. Применения нечетких правил вывода к прогнозированию волатильности .....	242
13.8. Задачи .....	245
<b>Список обозначений .....</b>	<b>248</b>
<b>Литература .....</b>	<b>251</b>
<b>Предметный указатель .....</b>	<b>259</b>