

УДК 512.62  
ББК 22.144.7  
М30

---

Интернет-магазин

MAFFES

<http://shop.rcd.ru>

- физика
  - математика
  - биология
  - нефтегазовые технологии
- 

**Марчук Н. Г.**

Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. — 304 с.

В книге изучаются уравнения релятивистской теории поля и, в частности, рассматриваются свойства ковариантности и симметрии уравнений Дирака – Максвелла и Дирака – Янга – Миллса. Вводится ряд новых систем уравнений, называемых модельными уравнениями теории поля. Эти системы уравнений воспроизводят основные свойства стандартных систем уравнений теории поля. В тоже время модельные уравнения имеют ряд отличий от стандартных уравнений теории поля, и, в частности, они обладают новой внутренней симметрией по отношению к псевдоунитарной (либо симплектической, либо спинорной) группе. Разработка концепции локальной псевдоунитарной (симплектической, спинорной) симметрии модельных уравнений теории поля ведет к далеко идущим следствиям. В книге используется математический аппарат алгебр Клиффорда.

**ISBN 978-5-93972-761-7**

**ББК 22.144.7**

© Н. Г. Марчук, 2009

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

<b>Список обозначений</b> . . . . .	7
<b>От автора</b> . . . . .	11
<b>Введение</b> . . . . .	14
<b>ГЛАВА 1. Уравнения Дирака–Максвелла</b> . . . . .	23
1.1. Пространство Минковского и тензорные поля . . . . .	23
1.2. Уравнения Дирака–Максвелла в пространстве Минковского . . . . .	25
1.3. Зарядовое сопряжение спиноров Дирака . . . . .	35
<b>ГЛАВА 2. Модельные уравнения Дирака–Максвелла</b> . . . . .	39
2.1. Модельная система уравнений Дирака–Максвелла . . . . .	39
2.2. Модельные уравнения Дирака–Максвелла с калибровочной псевдоунитарной симметрией . . . . .	41
2.3. Формула для $C_\mu$ . . . . .	42
2.4. Спиноризация модельных уравнений . . . . .	44
<b>ГЛАВА 3. Алгебры Клиффорда</b> . . . . .	49
3.1. Группы, векторные пространства, алгебры . . . . .	50
3.2. Алгебры Грассмана $\Lambda(n)$ . . . . .	51
3.3. Алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(p, q)$ . . . . .	54
3.4. Клиффорово умножение элементов алгебры Грассмана . . . . .	58
3.5. Коммутаторы и антикоммутаторы . . . . .	60
3.6. Теорема о свертке генераторов . . . . .	68
3.7. Операторы сопряжения . . . . .	70
3.8. Структура унитарного (или евклидова) пространства на алгебрах Клиффорда . . . . .	72
3.9. Эрмитовы идемпотенты и смежные структуры . . . . .	76
3.10. Нормальные представления элементов алгебр Клиффорда в виде комплексных матриц . . . . .	80
3.11. Матричные представления алгебры $\mathcal{C}(1, 3)$ . . . . .	87
3.12. Другие матричные представления алгебры $\mathcal{C}(1, 3)$ . . . . .	91
3.13. Вторичные генераторы алгебры $\mathcal{C}(1, 3)$ . . . . .	94

3.14. Простейшие операции над элементами алгебры $\mathcal{C}(1, 3)$ . . . . .	95
3.15. Множество $\mathcal{C}_{\text{EOO}}^{\mathbb{R}}(1, 3)$ . . . . .	99
<b>ГЛАВА 4. Группы и алгебры Ли, связанные с алгебрами Клиффорда</b> . . . . . 104	
4.1. Унитарная группа алгебры Клиффорда . . . . .	104
4.2. Случай алгебры Клиффорда $\mathcal{C}(1, 3)$ . . . . .	107
4.3. Псевдоунитарная группа алгебры Клиффорда . . . . .	110
4.4. Симплектическая подгруппа псевдоунитарной группы . . . . .	115
4.5. Спинорные и ортогональные группы . . . . .	119
4.6. Две экспоненты от элементов второго ранга . . . . .	121
4.7. Группы $\text{Pin}(1, 3)$ , $\text{Pin}_+(1, 3)$ , $\text{Spin}(1, 3)$ и $\text{Spin}_+(1, 3)$ . . . . .	127
4.8. Унитарные подгруппы псевдоунитарной, симплектической и спинорных групп . . . . .	129
<b>ГЛАВА 5. Модельные уравнения теории поля в формализме алгебры Клиффорда</b> . . . . . 135	
5.1. Тензоры со значениями в алгебре Клиффорда . . . . .	135
5.2. Уравнения Янга–Миллса . . . . .	137
5.3. Модельные уравнения Дирака–Янга–Миллса . . . . .	138
5.4. Гамильтонова форма модельных уравнений Дирака–Максвелла . . . . .	147
5.5. Локализация псевдоунитарной симметрии . . . . .	152
5.6. Модельные уравнения с двумя полями Янга–Миллса . . . . .	158
5.7. Полудивергентный вид модельного уравнения Дирака . . . . .	161
5.8. Модельные уравнения Дирака–Янга–Миллса с локальной спинорной симметрией . . . . .	161
5.9. Операция зарядового сопряжения . . . . .	164
<b>ГЛАВА 6. Модельные уравнения на псевдоримановом многообразии</b> . . . . . 166	
6.1. Псевдориманово спинорное многообразие . . . . .	166
6.2. Модельные уравнения на псевдоримановом многообразии . . . . .	176
6.3. Модельные уравнения с локальной спинорной симметрией на псевдоримановом многообразии . . . . .	180
<b>ГЛАВА 7. Модельные уравнения в формализме алгебры Атьи–Кэлера</b> . . . . . 185	
7.1. Дифференциальные формы и тетрада на спинорном многообразии . . . . .	185
7.2. Тензоры со значениями в алгебре Атьи–Кэлера . . . . .	189

7.3.	Унитарные, псевдоунитарные и спинорные группы в формализме алгебры Атьи–Кэлера . . . . .	191
7.4.	Формальные частные производные $\mathcal{D}_\mu$ . . . . .	193
7.5.	Операторы $\star, d, \delta$ . . . . .	196
7.6.	Связь спинорного многообразия $X^{1,3}$ с пространствами Римана–Картана . . . . .	198
7.7.	Формальные ковариантные производные . . . . .	203
7.8.	Модельные уравнения с псевдоунитарной симметрией . . . .	205
7.9.	Модельные уравнения с локальной спинорной симметрией .	211
<b>ГЛАВА 8. Модельные уравнения теории поля в матричном формализме . . . . .</b>		<b>216</b>
8.1.	Модельные уравнения Дирака–Максвелла . . . . .	216
8.2.	Связь между стандартными и модельными уравнениями Дирака–Максвелла . . . . .	222
8.3.	Модельные уравнения Дирака–Янга–Миллса . . . . .	224
8.4.	Модельные уравнения Дирака–Янга–Миллса с локальной псевдоунитарной симметрией . . . . .	226
8.5.	Модельные уравнения с двумя полями Янга–Миллса . . . .	230
8.6.	Модельная система уравнений со спинорной локальной симметрией . . . . .	233
<b>ГЛАВА 9. Специальные модельные уравнения . . . . .</b>		<b>239</b>
9.1.	Основная идея . . . . .	239
9.2.	Алгебры Ли антиэрмитовых дифференциальных форм . . . .	246
9.3.	Основные уравнения . . . . .	248
9.4.	Неабелевы законы сохранения заряда . . . . .	250
9.5.	Унитарная и спинорная калибровочные симметрии . . . . .	251
<b>ГЛАВА 10. Амплитуда в релятивистских уравнениях поля . . . .</b>		<b>253</b>
10.1.	Модельные уравнения Дирака–Максвелла с локальной спинорной симметрией . . . . .	254
10.2.	Специальные модельные уравнения Дирака–Максвелла . . .	255
10.3.	Фиксация спинорной калибровки . . . . .	260
10.4.	Частный случай $a_\mu = 0$ . . . . .	262
<b>ГЛАВА 11. Дополнения . . . . .</b>		<b>267</b>
11.1.	Ковариантные преобразования и симметрии модельных уравнений . . . . .	267
11.2.	Формулы для коммутаторов и антикоммутаторов . . . . .	272
11.3.	Матричные представления генераторов алгебр Клиффорда . .	276

11.4. Выражение компонент тетрады через компоненты метриче- ского тензора . . . . .	285
11.5. Алгебраические операции над тензорами . . . . .	287
11.6. Гипотезы . . . . .	290
11.7. P.S. . . . .	292
<b>Литература . . . . .</b>	<b>296</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>300</b>