МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ: ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Часть I. Теория

Учебно-методическое пособие

Составители:
В. В. Корзунина,
К. П. Лазарев,
З. А. Шабунина

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

Содержание

$$L_n^{(i)}(x)\Big|_{x_j} = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}, \quad i,j = 0,1,\ldots,n .$$

Многочлены $L_n^{(i)}(x)$ называются **коэффициентами Лагранжа**, а интерполяционный многочлен $P_n(x)$, записанный в виде

$$P_n(x) = f(x_0)L_n^{(0)}(x) + f(x_1)L_n^{(1)}(x) + \ldots f(x_n)L_n^{(n)}(x),$$

называется **интерполяционным многочленом в форме Лагранжа** и обозначается $L_n(x)$:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \qquad (3)$$

Коэффициенты Лагранжа обладают двумя полезными в вычислительных задачах свойствами.

Свойство 1. Пусть по заданным узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$, среди которых нет совпадающих, построены коэффициенты Лагранжа $L_n^{(i)}(x)$ и $i = 0,1,\ldots,n$. Тогда сумма коэффициентов $L_n^{(i)}(x)$ тождественно равна единице в любой точке *x*:

$$\sum_{i=0}^{n} L_n^{(i)}(x) \equiv 1 . \qquad (4)$$

Свойство 2. Коэффициенты Лагранжа инвариантны относительно линейной замены переменной *x*. Иными словами, если переменные *x* и *t* связаны линейной зависимостью $x = at + b$, причём $x_i = at_i + b,\ i = 0,1\ldots n$, то имеют место равенства:

$$L_n^{(i)}(x) = L_n^{(i)}(t), \quad i = 0,1,\ldots,n . \qquad (5)$$

Пример. Функция $f(x)$ задана в точках $x_i = 1 + i\cdot\frac{\pi}{8},\ i = 0,1,2,3$. Получить расчетную формулу для вычисления $f(1+\frac{5}{16}\pi)$.

Решение. Функция $f(x)$ задана в равноотстоящих узлах $(1,\ 1+\frac{\pi}{8},\ 1+\frac{2\pi}{8},\ 1+\frac{3\pi}{8})$. Для упрощения построения коэффициентов Лагранжа найдём линейное преобразование $t = \alpha x + \beta$, переводящее узлы x_i в узлы t_i с более простыми значениями, например, в узлы (–1, 0, 1, 2). Нетрудно определить, что такое преобразование имеет вид $t = \frac{8}{\pi} x - 1 - \frac{8}{\pi}$. Кроме того, значению $x = 1 + \frac{5}{16}\pi$ соответствует значение $t = \frac{3}{2}$. Вычислим три коэффициента Лагранжа $L_3^{(i)}(t), \quad i = 0,1,2$ в точке $t = \frac{3}{2}$:

$$L_3^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right) = \left.\frac{t(t-1)(t-2)}{-1\cdot(-2)\cdot(-3)}\right|_{t=\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{-6} = \frac{1}{16},$$

$$L_3^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right) = \left.\frac{(t+1)(t-1)(t-2)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)}\right|_{t=\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2} = -\frac{5}{16},$$

$$L_3^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right) = \left.\frac{(t+1)\cdot t\cdot(t-2)}{2\cdot 1\cdot(-1)}\right|_{t=\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}(-\frac{1}{2})}{-2} = \frac{15}{16}.$$

По свойству 1 коэффициентов Лагранжа:

$$L_3^{(3)}\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - L_3^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right) - L_3^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right) - L_3^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{16}.$$

Расчетная формула для вычисления $f(x)$ в точке $1 + \frac{5}{16}\pi$, имеет вид:

$$f\left(1 + \frac{5}{16}\pi\right) \cong L_3\left(1 + \frac{5}{16}\pi\right) = \left(f(x_0) - 5f(x_1) + 15f(x_2) + 5f(x_3)\right) \Big/ 16.$$

Если требуется найти не общее выражение интерполяционного многочлена $L_n(x)$, а его значение при некотором значении x, удобно пользоваться интерполяционной схемой Эйткена [1]. Опишем её.

Выражение

$$L_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} \tag{6}$$

является многочленом первой степени, построенным по точкам $(x_0, f_0), (x_1, f_1)$. Выражение

$$L_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$$

является многочленом второй степени. Вычислим его значения в узлах x_0, x_1, x_2:

$$L_{012}(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & 0 \\ L_{12}(x_0) & x_2 - x_0 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = f_0; \quad L_{012}(x_1) = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & x_0 - x_1 \\ f_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = f_1;$$

$$L_{012}(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x_2) & x_0 - x_2 \\ f_2 & 0 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = f_2 .$$

Следовательно, $L_{012}(x)$ совпадает с интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, построенным по точкам $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$. Аналогичным образом легко показать, что интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по точкам $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$ можно выразить через значения многочленов $L_{012\ldots n-1}(x), L_{123\ldots n}(x)$:

$$L_{0123\ldots n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{012\ldots n-1}(x) & x_0 - x \\ L_{123\ldots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}}{x_n - x_0} . \qquad (7)$$

Отметим, что порядок точек и их нумерация не имеют значения.

Вычислительную схему Эйткена для получения значения интерполяционного многочлена можно представить в виде таблицы 1, которая последовательно заполняется по строкам:

Таблица 1

i	x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$	$L_{i-4,i-3,i-2,i-1,i}$
0	x_0	y_0	$x_0 - x$				
1	x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$			
2	x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
3	x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	
4	x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	$L_{01234}(x)$
…	…	…	…	…	…	…	…

Интерполяционный процесс Эйткена характерен своим единообразием и поэтому легко реализуется на ЭВМ. При численной реализации хранить в памяти машины всю таблицу нет необходимости, так как для заполнения некоторой (k + 1)-й строки таблицы используются значения только предыдущей, k-й строки. Отметим, что использование схемы Эйткена позволяет добавлять всё новые и новые точки (x_i, f_i) без пересчёта всей таб-