Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова»

Л.В. Зяблицева, С.Ю. Корабельщикова, И.Н. Попов

Некоторые специальные полугруппы и их гомоморфизмы

Монография

Архангельск
ИПЦ САФУ
2013

УДК 512.533
ББК 22.144.1
З-991

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова

Рецензенты:
доктор физико-математических наук **С.И. Кублановский**,
кандидат физико-математических наук, доцент **Н.Л. Додонова**

Зяблицева, Л.В.

З-991 Некоторые специальные полугруппы и их гомоморфизмы: монография / Л.В. Зяблицева, С.Ю. Корабельщикова, И.Н. Попов; Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Архангельск: ИПЦ САФУ, 2013. – 128 с.: ил.
ISBN 978-5-261-00757-9

В монографии рассмотрены точные представления полугрупп идемпотентов, выявлены свойства полугрупп характеров и условия аппроксимации полугрупп характерами относительно предикатов, а также исследованы полугруппы всех (возможно частичных) отображений n-элементного множества в себя.

Для специалистов в теории полугрупп, преподавателей, студентов и аспирантов различных математических специальностей.

УДК 512.533
ББК 22.144.1

ISBN 978-5-261-00757-9

Оглавление

ŋ‚qdqAeY pɆ deqɆbYзe p ɛɑɒɓɔɐ Ɉqdqʎqɐè

Введение

Теория полугрупп принадлежит к числу сравнительно молодых областей алгебры. Первые исследования, посвященные полугруппам, относятся к 20-м годам XX века и связаны с именем А.К. Сушкевича. Другие ранние исследования по теории полугрупп принадлежат А. Клиффорду. К концу 60-х годов теория полугрупп сформировалась в самостоятельную ветвь современной алгебры. В те годы появились и первые монографии, целиком посвященные алгебраической теории полугрупп [22, 43]. Представление о современном состоянии этой теории можно получить по главе IV справочника «Общая алгебра» [59], где содержатся детальные сведения по основным разделам теории и приводится достаточно полная (на конец 80-х годов) библиография основных источников – книг и обзорных статей. На данный момент времени понятие полугруппы участвует в разнообразных приложениях алгебры, в том числе в приложениях в теории автоматов, теории кодов, математической лингвистике и многих других областях, включая даже биологию и социологию. Упомянутые выше приложения подробно рассматриваются в монографии Ж. Лаллемана [35], где содержится и достаточно полная (на середину 80-х годов) библиография по соответствующей проблематике. Приложениям полугрупп – от автоматов и формальных языков до некоторых биологических и социологических моделей – посвящены две главы учебного пособия «Прикладная абстрактная алгебра» [42].

Напомним основные определения теории полугрупп.

Полугруппой в современной алгебре называют множество P с определенной на нем алгебраической операцией $\circ$, подчиненной закону ассоциативности. В этом случае пишут: $(P, \circ)$. В том случае, если эта операция является коммутативной, полугруппу называют коммутативной. Если в полугруппе есть нейтральный элемент, то полугруппу называют моноидом. Моноид, в котором для любого элемента есть симметричный ему элемент, называют группой.

Примеры полугрупп чрезвычайно многочисленны. Приведем наиболее известные из них. Полугруппы с операцией сложения (умножения) будем называть аддитивными (мультипликативными) полугруппами.

Наиболее знакомыми всем полугруппами являются числовые полугруппы: это аддитивные и мультипликативные полугруппы натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел.

На этих множествах можно задать и другие операции, относительно которых эти множества также являются полугруппами. Так, если на множестве натуральных чисел задать операцию $x \circ y$ = НОД(x, y), то мы получим полугруппу. Также, к примеру, если на любом из множеств N, Z, Q, R задать операции следующим образом: $x \circ y = \min(x; y)$ или $x \circ y = \max(x; y)$, то также получаются полугруппы.

Также известными полугруппами являются полугруппы подмножеств некоторого множества с операциями объединения или пересечения, аддитивные и мультипликативные полугруппы квадратных матриц с элементами, к примеру, из множества целых чисел, полугруппы преобразований некоторого множества.

Подполугруппой полугруппы называют такое непустое подмножество этой полугруппы, что для любых элементов этого подмножества оно будет содержать и результат операции, примененный к этим элементам.

К примеру, подполугруппой в полугруппе (Z, +) является (N, +). Множество квадратных матриц с определителем, равным единице, является подполугруппой в мультипликативной полугруппе квадратных матриц.

К важнейшим понятиям теории полугрупп относятся гомоморфизм и изоморфизм.

Пусть S и T – полугруппы с операциями $\circ$ и $*$ соответственно. Гомоморфизмом полугрупп называется всякое отображение $f: S \to T$, удовлетворяющее условию: для любых $x, y \in S$ верно равенство: $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$. Если это отображение является взаимно однозначным (биекцией), то оно называется изоморфизмом. Полугруппы, для которых существует изоморфизм одной на другую, называются изоморфными. Изоморфные полугруппы, впрочем, как и другие алгебраические системы, считаются одинаковыми объектами.

ŋqdqүеү рƎ dеdƎрүзе р єɔɑрєү Јqdqүqұè

Приведем несколько примеров изоморфных полугрупп. Аддитивная полугруппа R изоморфна мультипликативной полугруппе положительных действительных чисел. Изоморфизмом первой на вторую будет, например, отображение, сопоставляющее любому числу $x \in \mathrm{R}$ его логарифм $\lg x$. Аддитивная полугруппа натуральных чисел изоморфна аддитивной полугруппе четных натуральных чисел, изоморфизм первой на вторую сопоставляет любому n число $2n$. А вот мультипликативные полугруппы всех натуральных чисел и всех четных натуральных чисел неизоморфны: в первой есть нейтральный элемент (единица), а во второй такового нет; между тем легко установить, что при изоморфизме нейтральный элемент обязан переходить в нейтральный.

Представленная монография состоит из трех глав, посвященным некоторым важным в теории полугруппам и их гомоморфизмам. В первой главе рассматриваются точные представления полугрупп идемпотентов. Во второй главе выясняются свойства полугрупп характеров и условия аппроксимации полугрупп характерами относительно предикатов. В третьей главе изучаются полугруппы всех (возможно частичных) отображений n-элементного множества в себя.

Эту книгу мы посвящаем светлой памяти своих научных руководителей М.М. Лесохина и И.С. Понизовского, выдающихся математиков и замечательных людей, определивших наш жизненный путь и тематику научных исследований.

ђqqbУеУ bɆ dеqɆbУзе b ɐɔɑbɔУ ɈqqbУqУè