

УДК 517.4(075.8)

ББК 22.162я73

А164

*Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Южного федерального университета (протокол № 6 от 22 июня 2021 г.)*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика»
Южно-Российского государственного политехнического университета,
почетный работник высшего профессионального образования РФ,
профессор *А. Э. Пасенчук*;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры
и дискретной математики Института математики, механики
и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета,
доцент *А. В. Козак*

*Учебник подготовлен в рамках договора № ОПОП/2/1 от 10.06.2021 по актуализации
основной профессиональной образовательной программы высшего образования
по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика (бакалавриат)»*

Абрамян, М. Э.

А164 Лекции по интегральному исчислению функций одной перемен-
ной и теории рядов / М. Э. Абрамян ; Южный федеральный уни-
верситет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного фе-
дерального университета, 2021. – 261 с.

ISBN 978-5-9275-3828-7

Учебник содержит лекционный материал второй части курса математиче-
ского анализа и включает следующие темы: неопределенный интеграл, опре-
деленный интеграл и его геометрические приложения, несобственный инте-
грал, числовые ряды, функциональные последовательности и ряды, степенные
ряды, ряды Фурье. Особенностью книги является возможность ее изучения
одновременно с просмотром видеолекций, записанных автором и доступных
на сайте youtube.com. Разделы и подразделы учебника снабжены сведениями
о номере лекции, времени начала соответствующего фрагмента и длительно-
сти этого фрагмента. В электронном варианте учебника эти сведения оформ-
лены в виде гиперссылок, позволяющих немедленно перейти к просмотру тре-
буемого фрагмента лекции.

Учебник предназначен для студентов физико-математических и техниче-
ских специальностей.

УДК 517.4(075.8)

ББК 22.162я73

ISBN 978-5-9275-3828-7

© Южный федеральный университет, 2021

© Абрамян М. Э., 2021

© Оформление. Макет. Издательство
Южного федерального университета, 2021

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Предисловие | 7 |
| Видеолекции | 9 |
| 1. Первообразная и неопределенный интеграл | 13 |
| Определение первообразной и неопределенного интеграла | 13 |
| Таблица неопределенных интегралов | 14 |
| Простейшие свойства неопределенного интеграла | 15 |
| Замена переменной в неопределенном интеграле | 17 |
| Формула интегрирования по частям | 19 |
| 2. Интегрирование рациональных функций | 22 |
| Разложение рациональной функции на простейшие дроби | 22 |
| Методы разложения рациональной функции | 23 |
| Интегрирование слагаемых в разложении | |
| рациональной функции на простейшие дроби | 24 |
| Теорема об интегрировании рациональной функции | 26 |
| 3. Интегрирование тригонометрических функций | 28 |
| Рациональные выражения для тригонометрических функций | 28 |
| Универсальная тригонометрическая замена | 28 |
| Особенности применения универсальной | |
| тригонометрической замены | 29 |
| Другие виды замены переменной | |
| для тригонометрических выражений | 31 |
| 4. Интегрирование иррациональных функций | 36 |
| Интегрирование рациональной функции | |
| с иррациональным аргументом | 36 |
| Обобщение на случай нескольких иррациональных аргументов ... | 37 |
| Интегрирование биномиального дифференциала | 38 |
| Подстановки Эйлера | 40 |
| 5. Определенный интеграл и суммы Дарбу | 44 |
| Определенный интеграл | 44 |
| Суммы и интегралы Дарбу | 48 |
| Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу | 53 |

6. Классы интегрируемых функций.

| | |
|---|----|
| Свойства определенного интеграла | 57 |
| Классы интегрируемых функций | 57 |
| Свойства интеграла, связанные с подынтегральными функциями .. | 61 |
| Свойства, связанные с промежутками интегрирования | 64 |
| Оценки интегралов | 68 |
| Интегральные теоремы о среднем | 72 |

7. Интеграл с переменным верхним пределом.

| | |
|---|----|
| Формула Ньютона – Лейбница | 77 |
| Интеграл с переменным верхним пределом | 77 |
| Формула Ньютона – Лейбница | 81 |
| Дополнительные приемы вычисления определенных интегралов .. | 83 |

8. Вычисление площадей и объемов

| | |
|---|-----|
| Квадрируемые фигуры на плоскости | 88 |
| Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора | 91 |
| Вычисление объемов | 100 |

9. Кривые и вычисление их длины

| | |
|--|-----|
| Вектор-функции и их свойства | 108 |
| Дифференцируемые вектор-функции | 110 |
| Теорема Лагранжа для вектор-функций | 112 |
| Кривые в пространстве. Спрямолинейные кривые | 114 |
| Свойства непрерывно дифференцируемых кривых | 116 |
| Варианты формулы для нахождения длины кривой | 121 |

10. Несобственные интегралы: определение и свойства

| | |
|---|-----|
| Задачи, приводящие к понятию несобственного интеграла | 124 |
| Варианты определения несобственного интеграла | 125 |
| Свойства несобственных интегралов | 128 |

11. Абсолютная и условная сходимость

| | |
|---|-----|
| несобственных интегралов | 132 |
| Критерий Коши сходимости несобственного интеграла | 132 |
| Абсолютная сходимость несобственных интегралов | 133 |
| Свойства несобственных интегралов от неотрицательных функций .. | 134 |
| Условная сходимость несобственных интегралов | 138 |
| Признак Дирихле условной сходимости несобственного интеграла .. | 140 |
| Интегралы, имеющие несколько особенностей | 142 |

| | |
|--|------------|
| 12. Числовые ряды | 145 |
| Числовые ряды: определение и примеры | 145 |
| Критерий Коши сходимости числового ряда и необходимое условие его сходимости | 147 |
| Абсолютно сходящиеся числовые ряды и арифметические свойства сходящихся числовых рядов | 149 |
| 13. Признаки сходимости числовых рядов с неотрицательными членами | 152 |
| Признак сравнения | 152 |
| Интегральный признак сходимости | 154 |
| Признаки Даламбера и Коши сходимости числовых рядов | 157 |
| 14. Знакопередающие ряды и условная сходимость | 162 |
| Знакопередающие ряды | 162 |
| Признаки Дирихле и Абеля условной сходимости числового ряда | 165 |
| Дополнительные замечания об абсолютно и условно сходящихся рядах | 170 |
| 15. Функциональные последовательности и ряды | 171 |
| Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда | 171 |
| Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда | 176 |
| Признаки равномерной сходимости функциональных рядов | 179 |
| 16. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов | 182 |
| Непрерывность равномерного предела | 182 |
| Интегрирование функциональных последовательностей и рядов | 185 |
| Дифференцирование функциональных последовательностей и рядов | 188 |
| 17. Степенные ряды | 193 |
| Степенной ряд: определение и теоремы Абеля о его сходимости | 193 |
| Верхний и нижний пределы последовательности | 197 |
| Формула Коши – Адамара для радиуса сходимости степенного ряда | 198 |
| Свойства степенных рядов | 201 |

| | |
|--|-----|
| 18. Ряд Тейлора | 206 |
| Вещественные аналитические функции и их разложение в ряд Тейлора | 206 |
| Вещественные аналитические функции и свойство бесконечной дифференцируемости | 208 |
| Достаточное условие существования ряда Тейлора. Разложения экспоненты, синуса и косинуса в ряд Тейлора | 211 |
| Разложение степенной функции в ряд Тейлора | 214 |
| Разложения логарифма и арксинуса в ряд Тейлора | 216 |
| 19. Ряды Фурье в евклидовом пространстве | 220 |
| Вещественное евклидово пространство и его свойства | 220 |
| Ряд Фурье по ортонормированной последовательности векторов в евклидовом пространстве | 224 |
| Ряд Фурье по полной ортонормированной последовательности векторов | 227 |
| 20. Ряды Фурье в пространстве интегрируемых функций .. | 232 |
| Евклидово пространство интегрируемых функций | 232 |
| Построение ортонормированной последовательности интегрируемых функций | 235 |
| Построение формального ряда Фурье для интегрируемых функций | 238 |
| Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном в случае периодических непрерывных функций | 240 |
| Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном в случае кусочно-непрерывных функций | 242 |
| Поточечная сходимость ряда Фурье | 245 |
| Равномерная сходимость ряда Фурье | 245 |
| Скорость убывания коэффициентов Фурье для дифференцируемых функций | 251 |
| Литература | 253 |
| Указатель | 255 |