

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

М.А. Артемов,  
Е.С. Барановский,  
М.В. Киргинцев

# **ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ СЖАТИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Учебно-методическое пособие для вузов

Воронеж  
Издательский дом ВГУ  
2015

# 1 Введение

Цифровые изображения играют весьма важную роль в современном информационном мире. Потребность в существенном увеличении объемов и скорости передачи визуальной информации определяет постоянный интерес к улучшению алгоритмов сжатия цифровых изображений.

В данном учебном пособии рассматривается вейвлетный подход к сжатию изображений. Понятия вейвлета и вейвлет-преобразования являются сравнительно новыми, но они уже нашли широкие применения во многих прикладных задачах, в том числе в задачах кодирования и сжатия данных.

В современной литературе имеется несколько подходов к изложению теории вейвлетов. Чаще всего вейвлет-преобразование определяется как обобщение преобразования Фурье (см., например, [1, 2]). При этом акцентируется внимание на преимуществах, которые дает вейвлет-анализ по сравнению с классическими методами Фурье. Прежде всего отмечается возможность обнаружения локализованных деталей сигнала, в то время как Фурье-анализ дает усредненную развертку сигнала. Новые возможности объясняются спецификой вейвлет-преобразования, обеспечивающего двумерную развертку одномерного сигнала за счет использования непрерывных масштабных преобразований и сдвигов базисного вейвлета. Другой подход к определению вейвлетов связан с использованием высокочастотных и низкочастотных фильтров (см. [3, глава 6]).

На наш взгляд, знакомство с теорией вейвлетов следует начинать с рассмотрения системы вейвлетов Хаара, названной по имени венгерского математика Альфреда Хаара. Эта система вейвлетов достаточно проста и допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Базовые вейвлеты Хаара хорошо иллюстрируют идею разложения потока информации на основной и уточняющий информационный поток.

Следуя подходу, предложенному в монографии [3], мы рассматри-

**Определение.** Выражение вида

$$\sum_{i=1}^m \xi_i \mathbf{x}_i, \quad \xi_i \in \mathbb{R},$$

называется *линейной комбинацией* векторов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ . Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если среди коэффициентов  $\xi_1, \dots, \xi_m$  есть ненулевые, и *тривиальной* в противном случае.

**Определение.** Система векторов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$  называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. В противном случае система векторов называется *линейно независимой*. Другими словами, система  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$  называется линейно независимой, если из равенства

$$\sum_{i=1}^m \xi_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

следует

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0.$$

**Пример.** Система функций  $\{\sin^2(t), \cos^2(t), 1\}$  является линейно зависимой, а система функций  $f_i, i = 1, \dots, 4$ , где

$$f_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \left[\frac{i-1}{4}, \frac{i}{4}\right), \\ 0, & \text{если } t \notin \left[\frac{i-1}{4}, \frac{i}{4}\right), \end{cases}$$

линейно независима.

**Определение.** Бесконечная система векторов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$  называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

**Упражнение.** Приведите пример бесконечной линейно независимой системы функций в пространстве  $L_2(0, 1)$ .

## 2.3 Евклидово пространство

**Определение.** Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством*.

Напомним, что скалярным произведением в линейном пространстве  $E$  называется функция, сопоставляющая паре элементов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$  вещественное число  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и удовлетворяющая следующим условиям:

- (i)  $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ ,
- (ii)  $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,
- (iii)  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,
- (iv)  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ , причем  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  только при  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**Примеры.**

1) Пространство  $\mathbb{R}^n$  со скалярным произведением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , есть евклидово пространство.

2) Пространство  $L_2(0, 1)$  со скалярным произведением

$$(v, u) = \int_0^1 u(t)v(t) dt.$$

где  $u, v \in L_2(0, 1)$ , является евклидовым пространством.

Скалярное произведение позволяет ввести в абстрактном линейном пространстве  $E$  понятие нормы (длины) вектора. Норма определяется с помощью формулы

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}.$$

Из условий (i)–(iv) следует, что основные свойства длины вектора, которые выполняются в обычном трехмерном пространстве, остаются справедливыми в случае абстрактного евклидова пространства.

**Упражнение.** Докажите справедливость неравенства Коши-Буняковского

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

## 2.4 Сходимость и замыкание

Пусть  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$  — последовательность элементов пространства  $E$ .

**Определение.** Говорят, что последовательность  $\{\mathbf{x}_n\}$  *сходится* к  $\mathbf{x}$  (пишут  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ ), если

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть  $M \subset E$  — некоторое множество,  $\mathbf{u}$  — некоторый элемент пространства  $E$ .

**Определение.** Говорят, что  $\mathbf{u}$  является *точкой прикосновения* множества  $M$ , если найдется последовательность  $\{\mathbf{x}_n\} \subset M$  сходящаяся к  $\mathbf{u}$ .

**Определение.** Совокупность всех точек прикосновения множества  $M$  обозначается  $\overline{M}$  и называется *замыканием* множества  $M$ .

## 2.5 Ортогональные системы векторов

Пусть  $E$  — евклидово пространство. Введем понятие угла между ненулевыми векторами  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ .

**Определение.** Угол между векторами  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$  определяется как решение уравнения

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}, \quad \varphi \in [0, \pi] \quad (2.1)$$

относительно  $\varphi$ .

Для обоснования корректности определения заметим следующее. Из неравенства Коши-Буняковского вытекает, что

$$0 \leq \frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Поэтому уравнение (2.1) имеет решение и это решение единственно.

Если  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , то  $\cos \varphi = 0$  и, следовательно,  $\varphi = \pi/2$ . В этом случае векторы называются *ортогональными*.