Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

А.И. Григорьев
С.О. Ширяева
Д.Ф. Белоножко

Нелинейные задачи гидродинамики волновых процессов

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов специальности Физика

Ярославль 2006

УДК 532.51
ББК В 253.322я73
Г 83

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2006 года

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доцент В.А. Коромыслов;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета.

Г 83 **Григорьев, А.И.** Нелинейные задачи гидродинамики волновых процессов: учебное пособие / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Д.Ф. Белоножко; Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 92 с.

ISBN 5-8397-0415-6

Излагаются основы математического моделирования нелинейных периодических движений заряженной свободной поверхности жидкости на примере нелинейных осцилляций заряженной капли.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 510400 Физика, специальности 010400 Физика (дисциплина «Нелинейные задачи гидродинамики», блок ДС), очной формы обучения.

УДК 532.51
ББК В 253.322я73

ISBN 5-8397-0415-6

Введение

В последние два с половиной десятилетия (первая теоретическая статья [1] появилась 1983 году) начались регулярные исследования нелинейных осцилляций заряженных капель [1 – 33], хотя экспериментальные и теоретические исследования устойчивости и динамики колебаний заряженных капель жидкости в линейном по амплитуде осцилляций приближении проводятся уже почти полтора столетия. Интерес к заряженной капле объясняется тем, что она является ключевым объектом в самых разнообразных академических, геофизических, технических и технологических явлениях и процессах. Например, с ней приходится встречаться при распыливании жидких топлив, инсектицидов, лакокрасочных материалов, в устройствах электрокаплеструйной печати, при исследовании проблем грозового электричества, в капельной модели ядра атома (см., например, обзоры [34 – 46] и указанную там литературу).

Впервые теоретическое изучение капиллярных колебаний и линейная теория устойчивости заряженной сферической капли были проведены Рэлеем [47, 48] в конце девятнадцатого века. Он представил каплю как колебательную систему с бесконечным набором собственных частот колебаний. В качестве отдельных мод осесимметричных колебаний поверхности рассматривались колебания, описываемые соответствующими полиномами Лежандра, при этом номер моды соответствовал числу выпуклостей (или впадин) на поверхности капли. Рэлей рассчитал частоты капиллярных колебаний и нашел критические условия потери устойчивости различными осесимметричными модами сильно заряженной капли. Наименее устойчивой оказалась основная (вторая) мода капиллярных колебаний, критические условия потери устойчивости которой и определяют устойчивость всей капли. Величину заряда на капле фиксированного радиуса с заданным коэффициентом поверхностного натяжения, при которой теряет устойчивость основная мода, принято называть Рэлеевским пределом устойчивости заряженной капли. При превышении зарядом Рэлеевского предела капля неустойчива и у нее не существует равновесных сферических форм. С тех пор проделана масса исследований линейной устойчивости капель в различных усложняющих вариантах, количество публикаций, посвященных линейным исследованиям, измеряется сотнями (см., например, обзоры [34 – 46] и указанную там литературу).

Но сосредоточимся на исследованиях нелинейных осцилляций заряженных капель [1 – 32, 49 – 51]. Можно выделить три основных направления проведенных исследований: 1) нелинейный анализ эволюции капиллярных осцилляций поверхности капли в рамках методов теории возмущений; 2) расчет равновесных форм заряженных капель вблизи Рэлеевского предела и анализ характера бифуркаций решений, имеющих место в окрестности критического значения заряда; 3) исследование нелинейного взаимодействия между отдельными модами колебаний заряженной капли.

Впервые классические методы теории возмущений (метод Линштедта – Пуанкаре) к исследованию осесимметричных капиллярных колебаний конечной амплитуды, совершаемых поверхностью незаряженной капли несжимаемой невязкой жидкости, были применены в [1]. Это позволило получить квадратичные по амплитуде начальной деформации поправки к форме поверхности капли, потенциалам скоростей и в третьем порядке малости к частотам колебаний. Расчеты проводились для трех типов начальных условий, определявшихся заданием начальной деформации капли в виде виртуальной возмущения n-ой моды осцилляций для n = 2,3,4. В экспериментальных исследованиях сдвига частоты при нелинейных колебаниях капли в условиях отсутствия силы тяжести, проведенных в [32], получено хорошее согласие с данными работы [1].

В работе [29] на основе более подходящего для исследования многочастотных колебаний метода многих масштабов были исследованы осцилляции конечной амплитуды заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, вызванные начальным возбуждением первых трех мод (n = 2,3,4), для случая заряда, меньшего Рэлеевского предела. Однако выяснилось, что при приближении величины заряда к критическому значению Q_* найденные в [29] поправки к амплитудам гармонических колебаний становятся несправедливыми, так как содержат неограниченно нарастающие при Q > Q_* слагаемые. Для устранения таких расходимостей в [32] на основе анализа асимптотического поведения решений, полученных в [29], малый параметр масштабирования вводится таким образом, чтобы он характеризовал соотношение между амплитудой деформации и отклонением величины заряда на капле Q от критического Q_*. Это позволило авторам [32] проанализировать нелинейную динамику осесимметричных осцилляций поверхности невязкой заряженной капли вблизи Рэлеевского предела и получить с точностью до второго порядка малости по величине решения, описывающие эволюцию формы капли, поля скоростей и электрического поля при начальном возбуждении основной моды колебаний поверхности.

Нелинейный анализ неосесимметричных колебаний капли, несущей заряд, мало отличающийся от Рэлеевского предела, методами, использованными в [32], предпринят в [24], где получены динамические уравнения для амплитуд неосесимметричных мод, описываемых сферическими функциями второго порядка. Решения выведенных уравнений в зависимости от величины начальной деформации капли и близости заряда к критическому значению могут проявлять стохастическое поведение.

Нелинейная структура и устойчивость осесимметричных статических форм поверхности идеально проводящей заряженной невязкой капли с зарядом вблизи Рэлеевского предела при начальном возбуждении основной (n = 2) моды рассматривались в [32]. В частности, было показано, что Рэлеевский предел соответствует точке транскритической бифуркации семейства статических сферических форм капли на семейства осесимметричных вытянутых и сплюснутых сфероидальных форм (этот результат был подтвержден численными расчетами [51]). Вытянутые формы существуют при значениях заряда, меньших критического, и неустойчивы по отношению к малоамплитудным возмущениям поверхности. Сплюснутые статические формы существуют при зарядах, больших Рэлеевского предела, причем они оказались устойчивыми по отношению к малым осесимметричным возмущениям. Кроме того, выяснилось, что при значениях заряда, немного меньших критического, устойчивость исходной сферической формы капли может быть нарушена колебаниями конечной амплитуды. Причем, величина заряда, на которую снижается его критическое значение, пропорциональна амплитуде начального удлинения капли. Результаты аналитических вычислений в [32] подтверждаются численными расчетами статических форм поверхности капли при возбуждении первых трех мод. Численный анализ осесимметричных статических форм заряженной капли вблизи Рэлеевского предела был продолжен в [25] с использованием интегральной формы уравнения Лапласа. В квадратичном по амплитудам мод приближении обнаружены несимметричные относительно экваториальной плоскости формы капель, неустойчивые в линейном приближении. В работе [24] при анализе неосесимметричных колебаний капли получено, что сплюснутые сфероидальные формы капли, существующие согласно [32] и численным расчетам [51] при Q > Q_* с неустойчивым по отношению к неосесимметричным возмущениям (позднее аналогичный результат получен и в линейном анализе [49, 50]). Таким образом, Рэлеевский предел соответствует точке абсолютной неустойчивости заряженной капли. Начальная стадия реализации неустойчивости заряженной капли проходит через последовательность удлиняющихся вытянутых сфероидов.

В [1, 12] был также подтвержден ранее отмеченный в [26 – 28] факт временной асимметрии осцилляций: при начальном возбуждении основной моды, когда форма капли осциллирует между вытянутым и сплюснутым сфероидами, время нахождения капли (пузыря) в состоянии вытянутого сфероида превышает время ее нахождения в сплюснутом состоянии, и эта тенденция усиливается с увеличением амплитуды осцилляций. Но констатацией факта Тсамопулос и Браун и ограничились. Истолкование же ему дано в [52], где показано, что при нелинейных осцилляциях капля совершает колебания не возле сферической формы, как было в линейном случае, а в окрестности фигуры, близкой к вытянутому сфероиду.

Вопросы взаимодействия различных мод капиллярных колебаний заряженной поверхности капли рассматривались в работах [2, 29]. Найденные в [29] в расчетах второго порядка малости квадратичные по малому параметру компоненты решений (деформации формы капли, потенциала поля скоростей течения жидкости в ней и электростатического потенциала в окрестности капли), а также поправки к частотам осцилляций, определяемые в расчетах третьего порядка малости, содержали в знаменателях множители вида: $\left(\omega_m^2 - j^2 \cdot \omega_n^2\right)$, где ω_m и ω_n – частоты различных мод осцилляций капли; j – целое число. В некоторых ситуациях (при некоторых значениях собственного заряда капли Q, ее радиуса и величины коэффициента поверхностно натяжения) может выполниться соотношение $\left(\omega_m^2 - j^2 \cdot \omega_n^2\right) = 0$. Такие ситуации по аналогии с вынужденными гармоническими осцилляциями принято называть резонансными, поскольку в точках резонансов решения расходятся. В теории возмущений отработаны процедуры отыскания решений, как в окрестности, так и в самой точке резонанса [53 – 55] путем введения параметра расстройки, величина которого может непрерывно изменяться. В физических задачах в параметры расстройки вводятся на основе изменения неких параметров задачи, которые ранее принимались фиксированными. В итоге резонансные компоненты решения сводятся к секулярным слагаемым, которые в свою очередь обрабатываются в стандартных математических процедурах.

В [29] в расчетах второго порядка малости был обнаружен резонанс между четвертой ($n=4$) и шестой ($n=6$) модами при некотором заряде капли Q_r, докритическом в смысле линейной устойчивости заряженной капли по отношению к собственному заряду (в смысле анализа устойчивости, проведенного Рэлеем) $Q_r < Q_*$, здесь Q_* – критический заряд, при котором теряет устойчивости основная мода ($n = 2$). Тсамопулос и Браун [29] ввели параметр расстройки на основе варьирования заряда капли Q в малой окрестности Q_r и построили решение, справедливое в самой точке резонанса и в его окрестности. Они показали, что в точке резонанса энергия полностью перекачивается из изначально возбужденной четвертой моды в шестую меньше чем за три периода осцилляций четвертой моды. Они показали, что максимальная амплитуда шестой моды достигается в положении точного резонанса (при равной нулю величине параметра расстройки) и что амплитуда шестой моды убывает по гиперболическому закону при увеличении абсолютной величины параметра расстройки.

В [29] также показано, что резонансные ситуации между модами осцилляций реализуются и для незаряженной капли. В частности, такое взаимодействие для основной ($n = 2$) и четвертой ($n = 4$) мод обнаруживается в расчетах третьего порядка малости. Указанная степень малости приводит к существенному увеличению (на порядок) характерного времени обмена энергией между резонансно взаимодействующими модами.

Нелинейное резонансное взаимодействие пятой ($n = 5$) и восьмой ($n = 8$), а также десятой ($n = 10$) и шестнадцатой ($n = 16$) мод в незаряженной капле идеальной несжи-