



Уральский  
федеральный  
университет

имени первого Президента  
России Б.Н. Ельцина

Институт математики  
и компьютерных наук

Ю. Ф. ДОЛГИЙ  
П. Г. СУРКОВ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рекомендовано методическим советом УрФУ  
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся  
по программе бакалавриата по направлению подготовки  
010800 «Механика и математическое моделирование»,  
по программе магистратуры по направлению подготовки  
010300 «Фундаментальные информатика и информационные технологии»

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2012

УДК 517.938(075.8)  
Д 64

Рецензенты:

кафедра мехатроники Уральского государственного университета путей сообщения (заведующий кафедрой доктор технических наук, профессор Б. М. Готлиб);

В. И. Максимов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом дифференциальных уравнений Института математики и механики УрО РАН

**Долгий, Ю. Ф.**

Д 64 Математические модели динамических систем с запаздыванием : учеб. пособие / Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2012. – 122 с.

ISBN 978-5-7996-0772-2

В учебном пособии рассмотрены математические модели с запаздыванием, описывающие поведение динамических систем в различных прикладных областях науки и техники. Приведены основные результаты теории функционально-дифференциальных уравнений. Используются методы качественного анализа при исследовании конкретных математических моделей с запаздыванием.

Для студентов университетов, изучающих методы математического моделирования.

УДК 517.938(075.8)

ISBN 978-5-7996-0772-2

©Уральский федеральный университет, 2012

©Долгий Ю. Ф., Сурков П. Г., 2012

# Оглавление

Предисловие . . . . .	5
<b>1. Дифференциальные уравнения с запаздыванием</b>	<b>7</b>
1.1. Дифференциальные уравнения с запаздыванием . . . . .	8
1.2. Дифференциальные уравнения с распределенным запаздыванием . . . . .	12
1.3. Дифференциальные уравнения с запаздыванием нейтрального типа . . . . .	14
<b>2. Общий вид решения линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием</b>	<b>15</b>
2.1. Общий вид решения линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием . . . . .	15
2.2. Общий вид решения линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием . . . . .	23
<b>3. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздыванием</b>	<b>31</b>
3.1. Определения устойчивости . . . . .	31
3.2. Устойчивость линейных автономных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием . . . . .	32
3.3. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве	33
3.4. Характеристические показатели линейных периодических систем с запаздыванием . . . . .	36
<b>4. Популяционная модель Хатчинсона</b>	<b>39</b>
4.1. Описание математической модели . . . . .	39
4.2. Устойчивость положения равновесия. Метод $D$ -разбиения в случае одного параметра . . . . .	40
<b>5. Модель кроветворения Мэкки–Гласса</b>	<b>44</b>
5.1. Описание математической модели . . . . .	44
5.2. Устойчивость положения равновесия. Метод $D$ -разбиения в случае двух параметров . . . . .	44
<b>6. Популяционная модель «хищник–жертва»</b>	<b>49</b>
6.1. Популяционная модель Лотки–Вольтерра . . . . .	49
6.2. Популяционная модель Мэя . . . . .	51

<b>7. Модель инфекционного заболевания Марчука</b>	<b>56</b>
7.1. Описание математической модели . . . . .	56
7.2. Устойчивость положения равновесия при отсутствии за- болевания . . . . .	58
7.3. Устойчивость положения равновесия в случае хрониче- ского заболевания . . . . .	59
<b>8. Влияние запаздывания на движение заряженной частицы</b>	<b>64</b>
8.1. Описание математической модели . . . . .	64
8.2. Исследование устойчивости круговых движений заря- женной частицы . . . . .	68
<b>9. Модель деформации вязкоупругого стержня</b>	<b>71</b>
9.1. Описание математической модели . . . . .	71
9.2. Устойчивость вертикальных положений равновесия . . .	72
<b>10. Модель роста и деления клеток</b>	<b>77</b>
10.1. Описание математической модели . . . . .	77
10.2. Эволюционные операторы . . . . .	78
10.3. Асимптотическое поведение решений . . . . .	82
<b>11. Модель фрезерования металлов</b>	<b>85</b>
11.1. Описание математической модели . . . . .	85
11.2. Области устойчивости в автономной модели . . . . .	86
11.3. Параметрический резонанс в периодической модели . .	89
<b>12. Двухпродуктовая модель производства товаров</b>	<b>96</b>
12.1. Описание математической модели . . . . .	96
12.2. Устойчивость положения равновесия в автономной модели производства товаров . . . . .	97
12.3. Устойчивость положения равновесия в периодической модели производства товаров . . . . .	99
<b>13. Периодические колебания в популяционной модели Хатчинсона</b>	<b>109</b>
13.1. Бифуркация Хопфа . . . . .	109
13.2. Вычисление периодического решения . . . . .	110
13.3. Устойчивость периодического решения . . . . .	113
<b>Библиографические ссылки</b>	<b>118</b>