

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# $j$ -ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебно-методическое пособие

Воронеж  
Издательский дом ВГУ  
2015

## Содержание

<b>Предисловие .....</b>	<b>5</b>
<b>Введение .....</b>	<b>6</b>
<b>1. Сингулярное уравнение Бесселя</b>	<b>11</b>
1.1. Сопряжённые дифференциальные операторы и уравнение Бесселя .....	11
1.2. Связь классического и сингулярного уравнений Бесселя . .	13
1.3. Представления решения сингулярного уравнений Бесселя в виде степенного ряда .....	16
1.4. $j$ -Функции Бесселя первого рода положительного индекса .	17
1.5. $j$ -Функции Бесселя первого рода отрицательного индекса . .	20
1.6. Задача Коши для сингулярного уравнения Бесселя . . . . .	22
1.7. Весовая задача Коши для $j$ -функции Бесселя с отрицательным индексом .....	24
1.8. Общее решение сингулярного уравнения Бесселя. $j$ -Функции Неймана ( $j$ -функция Бесселя второго рода) . . .	25
1.9. Представление $j$ -функции Бесселя интегралом Пуассона . .	28
<b>2. Ряды по <math>j</math>-функциям Бесселя</b>	<b>29</b>
2.1. Ортогональность системы $j$ -функций Бесселя .....	30
2.2. Оценка $L^2_\gamma$ -нормы $j$ -функций Бесселя .....	33
2.3. Ряды Фурье–Бесселя и Дини .....	34
<b>3. Интегральные преобразования на основе <math>j</math>-функций Бесселя</b>	<b>39</b>
3.1. Преобразование Фурье функций от сферических симметрий	39
3.2. Преобразование Фурье радиальных обобщенных функций .	42
3.3. Примеры преобразований Фурье радиальных функций . . .	45
3.4. Формула обращения преобразования Фурье–Бесселя . . . .	48
3.5. Другие интегральные преобразования с $j$ -функциями Бесселя в качестве ядра преобразования .....	51

## Введение

Появление **j-функций Бесселя**  $j_\nu$ ,  $\nu > -1/2$  в задачах математической физики достаточно просто проследить, рассмотрев преобразование Фурье радиальной функции в  $\mathbb{R}_3$  (общая теорема рассмотрена далее в пункте 3.1 «Преобразование Фурье функций от сферических симметрий»). Пусть  $x, \xi \in \mathbb{R}_3$ ,  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ,  $\langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$ ,  $f = f(|x|)$  – радиальная функция. Преобразование Фурье функции  $f(|x|)$  имеет вид:

$$F[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}_3} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(|x|) dx.$$

Произведем поворот системы координат, при котором направление оси  $x_1$  совпадёт с направлением вектора  $\xi$ . При таком преобразовании координат вектор  $\xi$  будет лежать на оси  $Ox_1$ , т.е. будет иметь вид  $\xi = (|\xi|, 0, 0)$ , а значит  $\langle x, \xi \rangle = x_1|\xi|$ . Поворот системы координат не меняет длин векторов и углы между векторами, поэтому мы, не меняя обозначений, запишем преобразование Фурье радиальной функции в виде

$$F[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_3} e^{-ix_1|\xi|} f(|x|) dx,$$

откуда вытекает очень важное свойство: преобразование Фурье радиальной функции есть снова радиальная функция<sup>1</sup>:  $F_{x \rightarrow \xi}[f(|x|)](\xi) = \widehat{f}(|\xi|)$ .

Подстановка сферических координат

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta, \\ x_2 &= r \sin \theta \cos \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ x_3 &= r \sin \theta \sin \alpha \end{aligned}$$

с последующим выделением в качестве коэффициента  $|S_1(3)|$  – площади единичной сферы в  $\mathbb{R}_3$  ( $|S_1(3)| = 4\pi$ ) приводит к равенству

$$F[f](\xi) = F[f](|\xi|) = \int_0^\infty f(r) r^2 dr \int_0^\pi e^{-ir\rho \cos \theta} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha =$$

---

<sup>1</sup>Это один из вариантов теоремы об инвариантности сферических симметрий относительно преобразования Фурье.

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^{+\infty} f(r) r^2 dr \int_0^\pi e^{-ir\rho \cos \theta} \sin \theta d\theta = \\
 &= 4\pi \int_0^{+\infty} f(r) r^2 dr \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-ir\rho \cos \theta} \sin \theta d\theta,
 \end{aligned}$$

где выражение

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-ir\rho \cos \theta} \sin \theta d\theta = j_{\frac{1}{2}}(r|\xi|)$$

и есть j-функция Бесселя индекса (иногда говорят: порядка)  $\nu = 1/2$ . Полученная функция есть частный случай «интегрального представления j-функции Бесселя», которое для всех  $\gamma > 0$  ( $\nu = \frac{\gamma-1}{2} > -1/2$ ) имеет вид

$$j_\nu(t) = \mathcal{P}^\nu e^{-it} = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{-it \cos \alpha} \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha \quad (1)$$

и называется *представлением j-функции Бесселя в виде интеграла Пуассона*<sup>2</sup>. В приведенной формуле  $\Gamma(z)$  – гамма-функция Эйлера<sup>3</sup>. Выражение

$$j_{\frac{n-2}{2}}(r\rho) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{-ir\rho \cos \varphi} \sin^{n-2} \varphi d\varphi$$

— j-функция Бесселя, отвечающая целому или полуцелому индексу  $\nu = \frac{n-2}{2}$ , которая могла бы появиться, в случае преобразования Фурье радиальной функции в  $\mathbb{R}_n$ . Как видим, преобразование Фурье радиальной функции (от  $n$  переменных!) сводится к (одномерному!) интегральному преобразованию с j-функцией Бесселя  $j_{\frac{\gamma-1}{2}}$ ,  $\gamma = n-1$  в качестве ядра преобразования:

<sup>2</sup>Далее j-функция Бесселя определена как решение сингулярного дифференциального уравнения Бесселя. Представление Пуассона этой функции будет доказано.

<sup>3</sup>Определяется при  $z > 0$  как  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ . Краткое изложение теории с доказательством необходимых формул приведены в приложении 1 этого пособия. В данном случае  $n = 3$ ,  $\gamma = n - 1 = 3 - 1 = 2$ ,  $\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} = 1/2$ .

$$F[f](\xi) = F[f](|\xi|) = F[f](\rho) = |S_1(n)| \int_0^{+\infty} f(r) j_{\frac{n-2}{2}}(r\rho) r^{n-1} dr, \quad (2)$$

где  $|S_1(n)|$  – площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}_n$ . Выражение

$$F_B[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} f(t) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(t\xi) t^\gamma dt$$

называется *преобразованием Фурье–Бесселя* функции  $f = f(t)$ .

Мы получили бы *смешанное преобразование Фурье–Бесселя*, если бы рассмотрели преобразование Фурье функции от осевой сферической симметрии  $f = f(|x'|, x'')$ , где  $x' \in \mathbb{R}_{n'}$ ,  $x'' \in \mathbb{R}_{n''}$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_{n'+n''}} f(|x'|, x'') e^{-i(x, \xi)} dx' dx'' = \\ & = |S_1(n')| \int_{\mathbb{R}_{1+n''}^+} f(r, x'') j_{\frac{n'-1}{2}}(r, |\xi'|) e^{-i(x'', \xi)} r^{n'-1} dr dx''. \end{aligned}$$

Приведенные рассуждения позволяют считать, что функции  $j_\nu$  порождены сферической симметрией, но это вопрос спорный, поскольку неизвестно, какая сферическая симметрия может породить j-функцию Бесселя индекса, не являющегося целым или полуцелым.

Наиболее полно j-функции Бесселя изучены Б. М. Левитаном в [10] на основе изучения решения сингулярного уравнения Эйлера–Пуассона. Им получены свойства j-функций Бесселя, главные из которых:

1) функции  $j_\nu$  удовлетворяют сингулярному уравнению Бесселя

$$B_t j_\nu(\lambda t) = \frac{\partial^2 j_\nu(t\lambda)}{\partial^2 t} + \frac{\gamma}{t} \frac{\partial j_\nu(t\lambda)}{\partial t} = -\lambda^2 j_\nu(t), \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2} \quad (3)$$

и начальным условиям<sup>4</sup>  $j_\nu(0) = 1$ ,  $j'_\nu(0) = 0$ ;

---

<sup>4</sup>Здесь второе условие называется «условием четности», по сути оно дублирует первое, которое говорит об ограниченности решения в нуле. Поэтому его обычно не пишут.