МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

j-ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

Содержание

Введение

Появление **j-функций Бесселя** j_ν, $\nu > -1/2$ в задачах математической физики достаточно просто проследить, рассмотрев преобразование Фурье радиальной функции в $\mathbb{R}_3$ (общая теорема рассмотрена далее в пункте 3.1 «Преобразование Фурье функций от сферических симметрий»). Пусть $x, \xi \in \mathbb{R}_3$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\langle x,\ \xi\rangle = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$, $f = f(|x|)$ – радиальная функция. Преобразование Фурье функции $f(|x|)$ имеет вид:

$$F[f](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{-i\langle x,\ \xi\rangle} f(|x|)dx.$$

Произведем поворот системы координат, при котором направление оси x_1 совпадёт с направлением вектора ξ. При таком преобразовании координат вектор ξ будет лежать на оси Ox_1, т.е. будет иметь вид $\xi = (|\xi|, 0, 0)$, а значит $\langle x,\ \xi\rangle = x_1|\xi|$. Поворот системы координат не меняет длин векторов и углы между векторами, поэтому мы, не меняя обозначений, запишем преобразование Фурье радиальной функции в виде

$$F[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{-ix_1|\xi|}\ f(|x|)\ dx\,,$$

откуда вытекает очень важное свойство: преобразование Фурье радиальной функции есть снова радиальная функция[1]: $F_{x\to\xi}[f(|x|)](\xi) = \widehat{f}(|\xi|)$.

Подстановка сферических координат

$$\begin{aligned} &x_1 = r\ \cos\,\theta\,,\\ &x_2 = r\sin\theta\ \cos\alpha\,, \qquad 0 \le \alpha \le 2\pi\,, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\\ &x_3 = r\sin\theta\ \sin\alpha \end{aligned}$$

с последующим выделением в качестве коэффициента $|S_1(3)|$ — площади единичной сферы в $\mathbb{R}_3$ $(|S_1(3)| = 4\pi)$ приводит к равенству

$$F[f](\xi) = F[f](|\xi|) = \int\limits_0^\infty f(r)\ r^2 dr \int\limits_0^\pi e^{-ir\rho\cos\theta}\ \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\alpha =$$

[1]Это один из вариантов теоремы об инвариантности сферических симметрий относительно преобразования Фурье.

$$= 2\pi \int\limits_0^{+\infty} f(r)\; r^2 dr \int\limits_0^{\pi} e^{-ir\rho\, \cos\theta}\; \sin\theta d\theta =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^{+\infty} f(r)\; r^2 dr \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} e^{-ir\rho\, \cos\theta}\; \sin\theta d\theta\,,$$

где выражение

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} e^{-ir\rho\, \cos\theta}\; \sin\theta d\theta = j_{\frac{1}{2}}(r|\xi|)$$

и есть j-функция Бесселя индекса (иногда говорят: порядка) $\nu = 1/2$. Полученная функция есть частный случай «интегрального представления j-функции Бесселя», которое для всех $\gamma > 0$ $\left(\nu = \frac{\gamma-1}{2} > -1/2\right)$ имеет вид

$$j_\nu(t) = \mathcal{P}^\nu e^{-it} = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi} e^{-it\cos\alpha}\;\; \sin^{\gamma-1}\alpha\; d\alpha \tag{1}$$

и называется *представлением j-функции Бесселя в виде интеграла Пуассона*[2]. В приведенной формуле $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера[3]. Выражение

$$j_{\frac{n-2}{2}}(r\rho) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int\limits_0^{\pi} e^{-ir\rho\, \cos\varphi}\; \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi$$

— j-функция Бесселя, отвечающая целому или полуцелому индексу $\nu{=}\frac{n-2}{2}$, которая могла бы появиться, в случае преобразования Фурье радиальной функции в $\mathbb{R}_n$. Как видим, преобразование Фурье радиальной функции (от n переменных!) сводится к (одномерному!) интегральному преобразованию с j-функцией Бесселя $j_{\frac{\gamma-1}{2}}$, $\gamma{=}n{-}1$ в качестве ядра преобразования:

[2]Далее j-функция Бесселя определена как решение сингулярного дифференциального уравнения Бесселя. Представление Пуассона этой функции будет доказано.

[3]Определяется при $z > 0$ как $\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$. Краткое изложение теории с доказательством необходимых формул приведены в приложении 1 этого пособия. В данном случае $n = 3$, $\gamma = n - 1 = 3 - 1 = 2$, $\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} = 1/2$.

$$F[f](\xi) = F[f](|\xi|) = F[f](\rho) = |S_1(n)| \int\limits_0^{+\infty} f(r)\; j_{\frac{n-2}{2}}(r\rho)\; r^{n-1}\, dr\,, \qquad (2)$$

где $|S_1(n)|$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}_n$. Выражение

$$F_B[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\; j_{\frac{\gamma-1}{2}}(t\xi)\; t^\gamma\, dr$$

называется *преобразованием Фурье–Бесселя* функции $f = f(t)$.

Мы получили бы *смешанное преобразование Фурье–Бесселя*, если бы рассмотрели преобразование Фурье функции от осевой сферической симметрии $f = f(|x'|, x'')$, где $x' \in \mathbb{R}_{n'}$, $x'' \in \mathbb{R}_{n''}$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_{n'+n''}} f(|x'|, x'')\, e^{-i(x,\,\xi)}\; dx'dx'' =$$

$$= |S_1(n')| \int\limits_{\mathbb{R}^+_{1+n''}} f(r, x'')\, j_{\frac{n'-1}{2}}(r, |\xi'|)\; e^{-i(x'',\,\xi)}\, r^{n'-1}\, dr dx''\,.$$

Приведенные рассуждения позволяют считать, что функции j_ν порождены сферической симметрией, но это вопрос спорный, поскольку неизвестно, какая сферическая симметрия может породить j-функцию Бесселя индекса, не являющегося целым или полуцелым.

Наиболее полно j-функции Бесселя изучены Б. М. Левитаном в [10] на основе изучения решения сингулярного уравнения Эйлера–Пуассона. Им получены свойства j-функций Бесселя, главные из которых:

1) функции j_ν удовлетворяют сингулярному уравнению Бесселя

$$B_t j_\nu(\lambda t) = \frac{\partial^2 j_\nu(t\lambda)}{\partial^2 t} + \frac{\gamma}{t}\,\frac{\partial j_\nu(t\lambda)}{\partial t} = -\lambda^2\, j_\nu(t)\,, \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2} \qquad (3)$$

и начальным условиям[4] $j_\nu(0) = 1, \quad j'_\nu(0) = 0$;

[4]Здесь второе условие называется «условием четности», по сути оно дублирует первое, которое говорит об ограниченности решения в нуле. Поэтому его обычно не пишут.