МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. В. Звягин

ЭЛЕМЕНТЫ АБСТРАКТНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

Оглавление

ляется элементом множества A, а запись $a \notin A$ или $a \overline{\in} A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Возможны различные способы задания множества. Один из способов состоит в простом перечислении его элементов. Так, например, запись $A = \{a, b, c\}$ указывает, что множество A состоит из элементов a, b, c. Другой способ состоит в определении множества с помощью некоторого характеристического свойства, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству. Обозначая символом $P(a)$ характеристическое свойство элементов множества A, множество A в данном случае задают записью $A = \{a : P(a)\}$. Например, множество целых чисел, принадлежащих отрезку $[0, 5]$ можно задать следующим образом: $A = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a \leq 5\}$.

Не всегда заранее известно, что рассматриваемое множество содержит хотя бы один элемент, поэтому для правомочности рассуждений целесообразно ввести понятие множества, не содержащего ни одного элемента. Такое множество называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Определение 1.1. *Всякое множество, число элементов которого равно одному из чисел* $0, 1, 2, ...$, *называется конечным. Множества, не являющиеся конечными, называются бесконечными.*

Определение 1.2. *Множества* A *и* B*, состоящие из одних и тех же элементов, называют равными и пишут* $A = B$.

На практике для доказательства равенства двух множеств показывают, что всякий элемент одного множества принадлежит другому, и наоборот.

Если множество A состоит из элементов, принадлежащих множеству X, то говорят, что A является *подмножеством* множества X (или A включено в X), и в этом случае пишут $A \subset X$ (или $A \subseteq X$). Например, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Используют также обозначение $X \supset A$, которое читается так: X содержит A.

Для всякого множества A имеют место вложения $\varnothing \subset A$, $A \subseteq A$. Подмножества множества A, отличные от $\varnothing$ и A, называются *собственными подмножествами* множества A.

1.2. Операции над множествами

Из данных множеств можно конструировать другие множества. Приведем наиболее важные и необходимые в дальнейшем способы конструирования.

Определение 1.3. *Объединением двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B, т.е.*

$$A \cup B = \{a : a \in A \text{ или } a \in B\}.$$

Определение 1.4. *Пересечением двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B, т.е.*

$$A \cap B = \{a : a \in A \text{ и } a \in B\}.$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то множества A, B называются *непересекающимися*.

Аналогично определяется объединение и пересечение любого (конечного или бесконечного) числа множеств A_α, $\alpha \in I$, где I – произвольное множество индексов. А именно, положим

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{a : a \in A_\alpha \text{ хотя бы для одного } \alpha \in I\};$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{a : a \in A_\alpha \text{ для всех } \alpha \in I\}.$$

Определение 1.5. *Разностью двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих A и не принадлежащих B, т.е.*

$$A \setminus B = \{a : a \in A \text{ и } a \notin B\}.$$

Если A – подмножество множества X, то множество $X \setminus A$ называют *дополнением* множества A до множества X и обозначают CA или $\overline{A}$.

Определение 1.6. *Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Отметим следующие свойства введенных операций над множествами:

1) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
5) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
6) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
7) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
8) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;
9) $(A \Delta B) \Delta C = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

Заметим также, если A_α система подмножеств множества X, то

$$X \setminus \Big(\bigcup_\alpha A_\alpha\Big) = \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha); \qquad X \setminus \Big(\bigcap_\alpha A_\alpha\Big) = \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha).$$

Определение 1.7. *Декартовым произведением (или просто произведением) $A \times B$ множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар вида (a, b), у которых на первом месте стоит элемент из множества A, а на втором – из B, т.е.*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Аналогичным образом дается определение произведения $A_1 \times ... \times A_n$ любого конечного набора множеств $A_1, ..., A_n$ как множество всех упорядоченных наборов из n элементов.

Пример 1.2. Если множества A и B состоят из вещественных чисел, то пару (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, можно рассмотреть как точку плоскости с абсциссой a и ординатой b. Заметим также, что произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ образует множество всех точек плоскости.

1.3. Фактор-множество

Рассмотрим произвольное множество A. По данному множеству можно строить новые множества, рассматривая множество некоторых подмножеств множества A. Среди таких множеств важную роль играют так называемые *покрытия* и *разбиения*.

Определение 1.8. *Всякое семейство $S = \{B_\alpha\}$, $\alpha \in I$ непустых подмножеств множества A называется покрытием множества A, если каждый элемент множества A принадлежит хотя бы одному из множеств B_α семейства S.*

Определение 1.9. *Покрытие $S = \{B_\alpha\}$, $\alpha \in I$ множества A называется разбиением множества A, если каждый элемент множества A принадлежит только одному из множеств B_α покрытия S.*

Иными словами, всякое семейство $S = \{B_\alpha\}$, $\alpha \in I$ непустых подмножеств множества A называется *разбиением* множества A, если его множества попарно не пересекаются, а объединение всех множеств семейства есть множество A.

Определение 1.10. *Подмножество B_α разбиения S называют классом данного разбиения, а само разбиение S называют также фактор-множеством множества A.*

Таким образом, задание фактор-множества сводится к заданию классов разбиения. Основным инструментом для описания классов разбиения является понятие отношения эквивалентности.

Определение 1.11. *Бинарным отношением называется любое множество упорядоченных пар.*

Из определения следует, что бинарным отношением является любое подмножество прямого произведения двух множеств.

Если R – бинарное отношение и $(a, b) \in R$, то говорят, что a и b связаны отношением R, или что для a и b выполняется отношение R. Вместо записи $(a, b) \in R$ часто используют более простую aRb.

Замечание 1.1. *Если $R \in A \times A$, то говорят, что R есть бинарное отношение на множестве A.*

Определение 1.12. *Бинарное отношение R на множестве A называется рефлексивным на A, если для каждого a из A выполнено aRa.*

В качестве примеров рефлексивных отношений можно указать отношение параллельности на множестве прямых плоскости, отношение равенства на каком-либо множестве чисел и отношение делимости на какой-либо совокупности целых чисел.

Определение 1.13. *Бинарное отношение R (на A) называется транзитивным (на A), если для любых a, b, c из области отношения R (на A) из aRb и bRc следует aRc.*

Например, отношение делимости на множестве целых чисел является транзитивным.

Определение 1.14. *Бинарное отношение R (на A) называется симметричным (на A), если для любых a, b из области отношения R (на A) из aRb следует bRa.*

Например, симметричными являются отношение параллельности прямых, отношение перпендикулярности прямых и отношение равенства.

Важным видом бинарного отношения является отношение эквивалентности.

Определение 1.15. *Бинарное отношение R на A называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Отношение эквивалентности часто обозначают символом $a \sim b$. Элементы a и b будем называть эквивалентными.

Пример 1.3. Пусть A – множество прямых на плоскости и $R = \{(a, b) : a, b \in R$ и a параллельно $b\}$ – отношение параллельности. Отношение параллельности на A есть отношение эквивалентности.

Пример 1.4. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел и n – целое число, отличное от нуля. Отношение $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}$ и $(a - b)$ делится на $n\}$ называется отношением сравнения по модулю n. Это отношение является отношением эквивалентности на $\mathbb{Z}$.