

В.Н. Розова, И.С. Максимова

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Курс лекций

Учебное пособие

Москва
Российский университет дружбы народов
2010

ББК 22.16+32.97
Р 64

У т в е р ж д е н о
*РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов*

Рецензент –

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики
Московского государственного института радиотехники,
электроники и автоматики *Г.Г. Магариш-Ильяев*

Р 64 Розова В.Н., Максимова И.С.

Методы оптимизации: Курс лекций: Учеб. пособие. –
М.: РУДН, 2010. – 109 с.

ISBN 978-5-209-03872-6

В пособии рассмотрены наиболее фундаментальные результаты классического вариационного исчисления и оптимального управления, из которых складывается курс методов оптимизации.

Приведены решения ряда экстремальных задач, что позволяет использовать данное пособие на практических занятиях.

Для студентов, обучающихся по специальностям «Математика. Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», «Математика. Компьютерные науки».

ISBN 978-5-209-03872-6

ББК 22.16+32.97

© Розова В.Н., Максимова И.С., 2010

© Российский университет дружбы народов, Издательство, 2010

Введение

На протяжении всей истории математики задачи отыскания наибольших и наименьших величин привлекали к себе внимание.

Необходимость исследования задач на экстремум появилась в связи с проблемами естествознания, его развития и технической деятельностью людей.

Особенное значение эти проблемы приобрели в наше время, так как возникла необходимость эффективно использовать природные богатства, материальные и технические средства и т.д.

Применение математических методов для исследования физических, технических, технологических и т.д. процессов становится возможным после того, как построены математические модели изучаемых процессов.

Первый общий рецепт, с помощью которого предлагалось исследовать задачи на максимум и минимум, был описан П. Ферма, в общем виде получен Ньютоном, переоткрыт Лейбницем и впервые опубликован. Далее усилиями Эйлера и Лагранжа были созданы приемы решения экстремальных задач. В работах Эйлера и Лагранжа была установлена связь вариационного исчисления и естествознания.

Мы постоянно встречаемся с управляемыми объектами, т.е. с объектами, на которые мы можем оказывать воздействие, например, машины, корабли, летательные аппараты, технологические процессы на производстве и многие другие.

Идеи использования математических методов для решения экстремальных задач, принадлежащие великим ученым, развивались и привели в наше время к построению теории оптимального управления для различных классов экстремальных задач. Принцип максимума Понтрягина лежит в основе теории оптимального управления и является одним из самых ярких достижений теории экстремума.

Данный курс лекций может служить учебным пособием для студентов старших курсов, имеющих математическую подготовку и изучающих методы решения экстремальных задач.

Содержание

| | |
|--|----|
| Введение | 3 |
| 1. Элементы функционального анализа | 5 |
| 2. Вариация по Лагранжу, производная Гато, производная Фреше | 7 |
| 3. Принцип Ферма и сопутствующие утверждения | 12 |
| 4. Экстремумы дифференцируемых функционалов | 14 |
| 5. Необходимое условие экстремума первого порядка | 19 |
| 5.1. Основные леммы вариационного исчисления | 20 |
| 5.2. Вывод уравнения Эйлера для классической задачи вариационного исчисления | 24 |
| 5.3. Специальные случаи уравнения Эйлера | 28 |
| 5.4. Уравнение Эйлера в многомерном случае | 32 |
| 5.5. Уравнение Эйлера для функционалов, зависящих от производных высших порядков | 33 |
| 6. Условный экстремум | 35 |
| 6.1. Задача с ограничениями типа равенств | 35 |
| 6.2. Изопериметрическая задача | 36 |
| 6.3. Решение изопериметрической задачи | 40 |
| 6.4. Задача Лагранжа | 42 |
| 6.5. Правило множителей Лагранжа в общем случае | 46 |
| 7. Задачи со свободными концами. | |
| Условие трансверсальности | 53 |
| 8. Необходимые условия экстремума второго порядка | 61 |
| 8.1. Необходимое условие Лежандра | 61 |
| 8.2. Сопряженные точки. Уравнение Якоби и свойства его решений | 65 |
| 8.3. Свойство знакопостоянства второй производной функционала | 68 |
| 8.4. Достаточные условия слабого экстремума | 72 |
| 8.5. Поле функционала | 78 |
| 8.6. Инвариантный интеграл Гильберта и его свойства | 81 |
| 8.7. Достаточные условия сильного экстремума | 82 |

| | |
|--|-----|
| 9. Оптимальное управление..... | 89 |
| 9.1. Постановка задачи оптимального управления | 89 |
| 9.2. Линейная задача оптимального быстрогодействия .. | 91 |
| 9.3. Принцип максимума Понтрягина | 92 |
| Структура учебно-методического комплекса..... | 100 |
| Список литературы..... | 107 |