

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методическое пособие для вузов

Составители:
Т.К. Кацаран,
Л.Н. Строева

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2009

Содержание

	Введение.....	4
§ 1	Предел и непрерывность функций многих переменных.....	5
	1.1 Основные понятия.....	5
	1.2 Примеры с решениями.....	7
	1.3 Задания к выполнению курсовой работы.....	9
§ 2	Производные и дифференциалы первого порядка.....	11
	2.1 Определение частных производных.....	11
	2.2 Частные производные и дифференциал сложной функции.....	12
	2.3 Производная по направлению и градиент.....	13
	2.4 Дифференцирование неявных функций.....	14
	2.5 Замена переменных.....	15
	2.6 Примеры с решениями.....	16
	2.7 Задания к выполнению курсовой работы.....	19
§ 3	Производные и дифференциалы высших порядков.....	24
	3.1 Частные производные высших порядков.....	24
	3.2 Дифференциалы высших порядков.....	25
	3.3 Формула Тейлора и ряд Тейлора.....	26
	3.4 Примеры с решениями.....	26
	3.5 Задания к выполнению курсовой работы.....	28
§ 4	Экстремумы функций многих переменных.....	31
	4.1 Локальный экстремум. Основные понятия.....	31
	4.2 Необходимые и достаточные условия экстремума.....	31
	4.3 Применение критерия Сильвестра.....	32
	4.4 Условный экстремум (постановка задачи).....	33
	4.5 Прямой метод нахождения точек условного экстремума.....	33
	4.6 Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума.....	34
	4.7 Примеры с решениями.....	35
	4.8 Задания к выполнению курсовой работы.....	37
	Список используемой литературы.....	39

Графиком функции двух переменных $u = f(x, y)$, $(x, y) \in E \subset \mathbb{R}^2$, называют множество всех точек вида $(x, y, f(x, y))$, где $(x, y) \in E$, пространства \mathbb{R}^3 .

Например, из курса аналитической геометрии известно, что графиком функции $u = 4x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, является эллиптический гиперболоид. Аналогичным образом можно определить понятие графика функции трех и более переменных.

Определение (Гейне). Число a называют *пределом функции* $f(x)$ в точке x^0 , если для любой последовательности точек $x^{(m)} \in U^n(x^0)$, $x^{(m)} \neq x^0$, сходящейся к x^0 , числовая последовательность $f(x^{(m)})$ сходится к a .

Для того чтобы доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x^0 , достаточно указать две последовательности точек: $x^{(m)} \in U^n(x^0)$ и $y^{(m)} \in U^n(x^0)$, $x^{(m)} \neq x^0$, $y^{(m)} \neq x^0$, сходящиеся к x^0 , такие, что $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x^{(m)}) \neq \lim_{m \rightarrow \infty} f(y^{(m)})$.

Определение (Коши). Число a называют *пределом функции* $f(x)$ в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < \rho(x; x^0) < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Определения Коши и Гейне равносильны.

Предел функции $u = f(x, y)$ двух переменных в точке (x_0, y_0) обычно обозначают

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y).$$

Для функций нескольких переменных справедливы теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного функций, аналогичные соответствующим теоремам для функций одного переменного.

Для функций $n > 1$ переменных можно рассматривать $n!$ так называемых повторных пределов. В частности, в случае функции двух переменных $u = f(x, y)$ можно рассматривать два повторных предела в точке (x_0, y_0) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)) \text{ и } \lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)).$$

Функцию $f(x)$, определенную в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, называют *непрерывной в точке* x^0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x^0)$.

1.2. Примеры с решениями.

Пример 1.1. Найти $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

Решение. Воспользуемся определением Коши. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (а именно $\delta = \varepsilon$) такое, что для всех точек $(x; y)$, удовлетворяющих условию $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ и отличных от начала координат, справедливо неравенство

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

Пример 1.2. Показать, что предел функции $f(x; y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ в точке $(0; 0)$ не существует.

Решение. Воспользуемся определением предела Гейне. Пусть $(x^{(m)}; y^{(m)})$ – последовательность точек, лежащих на параболе $x = y^2$, причем $x^{(m)} \rightarrow 0$, $y^{(m)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x^{(m)}; y^{(m)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(y^{(m)})^2 (y^{(m)})^2}{((y^{(m)})^2)^2 + (y^{(m)})^4} = \frac{1}{2}. \quad (1.4)$$

Далее, пусть $(\tilde{x}^{(m)}; \tilde{y}^{(m)})$ – последовательность точек, лежащих на прямой $x = y$, причем $\tilde{x}^{(m)} \rightarrow 0$, $\tilde{y}^{(m)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. В этом случае

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(\tilde{x}^{(m)}; \tilde{y}^{(m)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(\tilde{y}^{(m)}) (\tilde{y}^{(m)})^2}{(\tilde{y}^{(m)})^2 + (\tilde{y}^{(m)})^4} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(\tilde{y}^{(m)})}{1 + (\tilde{y}^{(m)})^2} = 0. \quad (1.5)$$

Полученные результаты (1.4) и (1.5), согласно определению Гейне, подтверждают, что предел функции $f(x; y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ в точке $(0; 0)$ не существует.

Пример 1.3. Вычислить повторные пределы $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ и $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$, где $f(x, y) = \frac{3x + 4y}{x - y}$ и показать, что они различны.

Решение. Действительно

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3x + 4y}{x - y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 4y}{x - y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y}{-y} = -4.$$

Пример 1.4. Выяснить, является ли функция

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

в точке $(0; 0)$: 1) непрерывной по x ; 2) непрерывной по y ; 3) непрерывной.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0.$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не существует, так как для последовательности точек $(x^{(m)}; y^{(m)})$,

лежащих на прямой $y = kx, k \neq 0, x^{(m)} \rightarrow 0, y^{(m)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k(x^{(m)})^2}{(x^{(m)})^2 + k^2(x^{(m)})^2} = \frac{k}{1 + k^2} \neq 0. \quad (1.6)$$

При произвольных значениях k ($k \neq 0$) выражение (1.6) принимает различные значения, отличные от нуля. Последнее означает, что исследуемая функция не является непрерывной в точке $(0; 0)$ и является непрерывной по переменной x и переменной y в этой точке.

Пример 1.5. Найти значения a и b , при которых функция

$$u(x, y) = \begin{cases} a, & \text{если } x^2 + y^2 = 1 \\ \sqrt{5(x^2 + y^2) - 4 - (x^2 + y^2)^2}, & \text{если } 1 \leq x^2 + y^2 < 4 \\ b, & \text{если } x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

является непрерывной на своей области определения.

Решение. Областью определения функции $u(x; y)$ является множество точек $(x; y) \in R^2$, описываемых неравенством $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Вычислим следующие пределы

$$\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow 1} \sqrt{5(x^2 + y^2) - 4 - (x^2 + y^2)^2} = 0;$$

$$\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow 4} \sqrt{5(x^2 + y^2) - 4 - (x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Из полученных результатов следует, что $a = b = 0$.