Кемеровская государственная медицинская академия

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

I

Матрицы и определители
Системы линейных уравнений
Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Кемерово - 2006

ђddayeY bЁ dəbЁbYзe b eзаbcя JddbYayè

ГОУ ВПО «Кемеровская государственная медицинская академия
Федерального агентства по здравоохранению и социальному развитию»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

I

Матрицы и определители
Системы линейных уравнений
Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Методические указания и задания контрольной работы №1
для студентов I курса заочного отделения факультета
«Экономика и управление на предприятии (здравоохранение)»

Кемерово - 2006

УДК 51(075)-057.875

Высшая математика. Часть I. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений. Векторная алгебра и аналитическая геометрия / Под ред. к.ф.-м.н. доц. В.И. Бухтояровой // Кемерово, 2006. – 53 с.

Методические указания и контрольные задания для студентов I курса заочного отделения факультета «Экономика и управление на предприятии (здравоохранение)».

Составители: О.В. Головко, Г.Н. Дадаева, Е.В. Салтанова

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс высшей математики для студентов заочного отделения факультета «Экономика и управление на предприятии (здравоохранение)» ставит своей целью формирование у студентов базы знаний по высшей математике необходимой и достаточной для профессиональной деятельности. Необходимый уровень знаний задается государственным стандартом. Достаточность базы знаний обеспечивается структурой преподавания, направленной на освоение теоретического материала и практическое применение полученных знаний для решения задач экономического содержания.

Методические указания содержат необходимый теоретический минимум, включающий важнейшие определения, теоремы и формулы, для решения заданий контрольной работы. На примерах подробно разбираются решения типовых задач по четырем основным темам контрольной работы:

1. матрицы, определители и действия над ними;
2. системы линейных уравнений;
3. векторная алгебра;
4. аналитическая геометрия.

Методические указания и контрольные задания подготовлены на основании коллективного опыта сотрудников кафедры медицинской и биологической физики и высшей математики Кемеровской государственной медицинской академии.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ
(матрицы и определители, системы линейных уравнений, векторная алгебра и аналитическая геометрия)

Понятие определителя n–го порядка. Миноры, алгебраические дополнения. Свойства и способы вычисления определителей n–го порядка. Матрицы и действия над ними. Транспонированная матрица. Обратная матрица и способы ее нахождения. Ранг матрицы. Собственные значения матриц.

Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Совместная и определенная системы линейных уравнений. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Формулы Крамера.

Метод Гаусса. Однородные системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений. Допустимое, базисное, опорное решения системы линейных уравнений.

Элементы векторной алгебры. Понятие вектора – определение, коллинеарность, равенство векторов. Операция сложения векторов и ее свойства. Операция вычитания векторов и умножения вектора на число. Теорема о коллинеарных векторах. Линейная зависимость векторов. Проекция вектора на ось. Декартовы прямоугольные координаты вектора. Деление вектора в заданном отношении. Скалярное произведение векторов, его свойства. Выражение скалярного произведения векторов в декартовых координатах. Векторное и смешанное произведения, основные свойства, их вычисление через определители.

Элементы аналитической геометрии. Понятие об уравнении линии на плоскости и поверхности в пространстве. Уравнения окружности. Общее уравнение плоскости. Угол между плоскостями. Различные виды уравнений прямой в пространстве и на плоскости. Направляющий вектор прямой. Векторное и каноническое уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой и плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Кремера Н.Ш. М.: Юнити. 2004.
2. Кузнецов Б.Т. Математика. М.: Юнити. 2004.
3. Письменный В.Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. М.: Айрис-Пресс. 2005.
4. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа. 2005.
5. Практикум по высшей математике для экономистов. Под ред. Кремера Н.Ш. М.: Юнити. 2004.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Матрицы и определители.

Матрица – таблица чисел или выражений с определенным количеством строк и столбцов. Элементы матрицы обозначают двумя индексами a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца.

Общий вид: $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

где $m \times n$ размерность матрицы, m - число строк, n - число столбцов. Если $m = n$, то матрица квадратная, если $m \neq n$ - прямоугольная.

Выделяют: $A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ - матрица – столбец;

$A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$ - матрица - строка.

Операции над матрицами.

1. Равенство матриц: $A_{m\times n} = B_{m\times n}$, если $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пример. Найти равные матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрицы $A = D$, остальные неравны, т.к. размерности не совпадают.

Решение системы n линейных уравнений с n переменными методом обратной матрицы.

Систему уравнений (1) записывают в матричной форме (2). Равенство вида $AX = B$, где A и B - матрицы, называется матричным уравнением.

Решить матричное уравнение, означает найти матрицу-столбец X, такую, которая, будучи подставлена в уравнение, даст тождество.

Схема решения матричного уравнения $AX = B$:

1. умножим слева обе части уравнения на матрицу A^{-1}, обратную матрице A:

$A^{-1}AX = A^{-1}B$;

2. решение системы уравнений (1):

$$X = A^{-1}B. \tag{3}$$

<u>Пример.</u> Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Обозначим: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Тогда в матричной форме система имеет вид: $AX = B$. Определитель матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0,$$

т.е. обратная матрица A^{-1} существует и равна:

ђqdqyeY bЁ dəqЁbYзə d əɑɑbɔy Jqdqyqyè

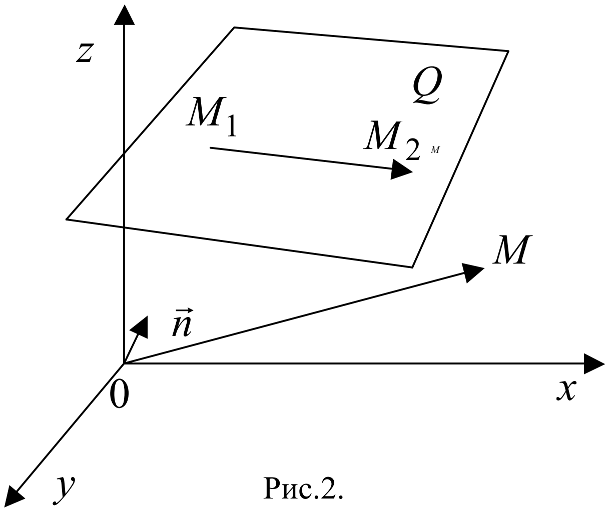

Рис.2.

Положение любой точки в пространстве можно однозначно определить с помощью прямоугольной системы координат. Если M - произвольная точка пространства (рис. 2.), то вектор $\overrightarrow{OM}$ называется радиусом – вектором точки M. Координатами точки $M\ (x, y, z)$ в пространстве называются координаты радиус – вектора $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$.

Плоскость Q проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$. В плоскости Q произвольно расположена точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис.2) имеет координаты:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1) \tag{12}$$

Косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{MM_1} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{MM_2} = (x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}\right)}{\left|\overrightarrow{MM_1}\right| \left|\overrightarrow{MM_2}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{13}$$

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{14}$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задание 1. Найдите матрицу C и ее след trC.

1.1. $C = (AB)' + 3E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2. $C = 3B' + AB$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3. $C = A^2 - 2B'$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4. $C = BA - A'B'$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.5. $C = (A^2)' + 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.6. $C = AB' - 2A'$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

8.2. Найдите угол между прямой $3x + y - 6 = 0$ и прямой, проходящей через точку $A(-3; 1)$ и $B(3; 3)$.

8.3. Зная, что изменение объема производства y с изменением производительности труда x происходит по прямой линии, составьте уравнение описывающее объем производства, если при $x = 2, y = 200$, а при $x = 4, y = 380$. Определите объем производства при $x = 10$.

8.4. Зная, что изменение объема производства y с изменением производительности труда x происходит по прямой линии, составьте уравнение, описывающее объем производства, если при $x = 2\ y = 120$, а при $x = 6\ y = 400$. Определите объем производства при $x = 35$.

8.5. Найдите угол между прямой $3x + 2y - 6 = 0$ и прямой, проходящей через точку $A(0; 1)$ и $B(4; 2)$.

8.6. Зная, что изменение объема производства y с изменением производительности труда x происходит по прямой линии, составьте уравнение, описывающее объем производства, если при $x = 8\ y = 120$, а при $x = 10\ y = 300$. Определите объем производства при $x = 20$.

8.7. Зная, что изменение объема производства y с изменением производительности труда x происходит по прямой линии, составьте уравнение описывающее объем производства, если при $x = 10, y = 300$, а при $x = 20, y = 500$. Определите объем производства при $x = 40$.

8.8. Отрезок, ограниченный точками $A(1; -3)$ и $B(4; 3)$, разделен на три равные части. Определите координаты точек деления.

8.9. Найдите угол между двумя прямыми $x + 7y - 6 = 0$ и $x - 3y - 6 = 0$.

8.10. Зная, что изменение объема производства y с изменением производительности труда x происходит по прямой линии, составьте уравнение, описывающее объем производства, если при $x = 5\ y = 240$, а при $x = 8\ y = 410$. Определите объем производства при $x = 20$.

ђqdqyeY bЁ deqЁbYзe d ɛɑɑбɑɣ ɟqqdYqyè

Отпечатано редакционно-издательским отделом
ГОУ ВПО КемГМА Росздрава

650029, Кемерово,
ул. Ворошилова, 22а.
Тел./факс. +7(3842)734856;
epd@kemsma.ru

Подписано в печать 28.03.2006
Гарнитура таймс. Тираж 200 экз.
Формат 21×30½ У.п.л. 3,0.

Отпечатано с готового оригинал-макета
Лицензия ЛР №21244 от 22.09.97