

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Северный (Арктический) федеральный университет  
имени М.В. Ломоносова»

**Е.А. Андреева, Н.А. Шилова**

# **ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БИОЛОГИЧЕСКИМИ СООБЩЕСТВАМИ**

*Учебное пособие*

Архангельск



ИД САФУ  
2014

УДК 519.6+574.36(075)  
ББК 22.161.8+22.192.3+28.081я73  
А65

*Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом  
Северного (Арктического) федерального университета  
имени М.В. Ломоносова*

Рецензенты:

*А.Н. Цирулёв*, доктор физико-математических наук, профессор, декан  
математического факультета Тверского государственного университета;  
*А.В. Семушин*, кандидат биологических наук, заместитель директора  
ФГУП «ПИНРО»

**Андреева, Е.А.**

А65      Оптимальное управление биологическими сообществами:  
учебное пособие / Е.А. Андреева, Н.А. Шилова; Сев. (Арктич.)  
федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Архангельск: ИД САФУ,  
2014. – 240 с. : ил.

ISBN 978-5-261-00880-4

Подробно рассмотрены подходы к математическому моделиро-  
ванию, исследованию моделей, изложена математическая теория оп-  
тимального управления. Приведены задачи, иллюстрирующие осо-  
бенности применения принципа максимума к исследованию особых  
оптимальных управлений, описаны численные методы и алгоритмы  
построения оптимального решения.

Предназначено для студентов, магистрантов, аспирантов инсти-  
тута математики, информационных и космических технологий, а  
также для научных работников, занимающихся исследованиями в  
области оптимизации и изучения экстремальных принципов матема-  
тической биологии.

УДК 519.6+574.36(075)  
ББК 22.161.8+22.192.3+28.081я73

ISBN 978-5-261-00880-4

© Андреева Е.А., Шилова Н.А., 2014  
© Северный (Арктический) федеральный  
университет им. М.В. Ломоносова, 2014

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
<b>Глава 1. Математическое моделирование</b> .....	8
1.1. Понятие модели, критерии модели и ее структура .....	8
1.2. Функции и типология моделей .....	11
1.3. Математические модели и их характеристика .....	14
1.4. Математическое моделирование и его этапы .....	15
<b>Глава 2. Модели, описываемые системами обыкновенных     дифференциальных уравнений</b> .....	21
2.1. Модель «хищник–жертва» .....	21
2.2. Модель роста биомассы водорослей .....	30
2.3. Модель развития лесонасаждений .....	35
2.4. Модель возобновляемых (невозобновляемых) природных ресурсов .....	39
2.5. Устойчивость динамических систем .....	40
2.6. Исследование устойчивости решений динамических моделей .....	44
2.6.1. Модель «хищник–жертва» .....	45
2.6.2. Модель роста биомассы водорослей .....	46
2.6.3. Модель развития лесонасаждений .....	60
<b>Задания для самостоятельной работы</b> .....	67
<b>Глава 3. Задача оптимального управления</b> .....	69
3.1. Постановка задачи оптимального управления. Необходимое условие оптимальности .....	75
3.2. Постановка задачи оптимального управления ростом биомассы водорослей .....	85
3.3. Принцип максимума для задачи оптимального управления ростом биомассы водорослей на заданном интервале времени ...	89
3.4. Принцип максимума в интегральной форме для задачи с фазовыми ограничениями .....	93
3.5. Принцип максимума для задачи с нефиксированным процессом времени .....	97
3.6. Принцип максимума для задачи с фазовыми ограничениями .....	102
<b>Задания для самостоятельной работы</b> .....	110
<b>Глава 4. Особое оптимальное управление</b> .....	112
4.1. Особые оптимальные управления, условие Келли, условие Коппа–Мойера .....	112
4.2. Особые оптимальные управления в задаче оптимального управления ростом биомассы водорослей .....	115

4.3. Особые оптимальные управления в задаче оптимального управления лесонасаждениями .....	120
4.3.1. Постановка задачи .....	120
4.3.2. Исследование задачи на наличие особых режимов .....	125
<b>Задания для самостоятельной работы .....</b>	<b>126</b>
<b>Глава 5. Дискретные задачи оптимального управления .....</b>	<b>128</b>
5.1. Необходимые условия оптимальности в дискретной задаче оптимального управления со смешанными ограничениями .....	128
5.2. Принцип максимума в дискретной задаче оптимального управления .....	134
5.3. Метод динамического программирования для задачи оптимального управления ростом биомассы водорослей .....	145
5.4. Метод динамического программирования для задачи оптимального управления ростом биомассы водорослей с возрастной структурой .....	159
5.5. Дискретная задача оптимального управления развитием лесонасаждений .....	170
5.6. Дискретная задача оптимального управления природными ресурсами .....	173
<b>Задания для самостоятельной работы .....</b>	<b>175</b>
<b>Глава 6. Численные методы решения задачи оптимального управления .....</b>	<b>177</b>
6.1. Общая дискретная аппроксимация .....	177
6.2. Численные методы построения решения задачи оптимального управления .....	184
6.2.1. Метод проекции градиента .....	184
6.2.2. Метод сопряженного градиента .....	190
6.2.3. Метод Ньютона .....	191
6.2.4. Метод штрафных функций .....	196
6.3. Определение параметров модели в задаче оптимального управления и исследование их влияния на оптимальное решение .....	203
6.3.1. Теория обратных задач .....	204
6.3.2. Статистическая обработка данных .....	205
6.3.3. Исследование влияния параметров модели на оптимальное решение .....	209
6.4. Методы решения краевых задач (метод пристрелки) .....	213
6.5. Многокритериальные задачи (множество Парето) .....	217
<b>Задания для самостоятельной работы .....</b>	<b>234</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>236</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическое моделирование и вычислительный эксперимент являются основными инструментами для исследования сложных систем, прогнозирования их развития и управления ими. К таким сложным системам относятся и биологические системы.

Технологический прогресс, который привел к появлению и бурному развитию вычислительных машин нового поколения с мощным программно-инструментальным и информационным обеспечением, позволил всесторонне развить и расширить применение математического моделирования во многих сферах научного знания.

Каждая естественная наука базируется на эмпирических, теоретических и математических исследованиях. Эмпирическая часть науки содержит в себе фактические сведения, найденные в ходе экспериментов или наблюдений. Теоретическая часть развивает теоретические концепции, которые с единой позиции позволяют объяснить значительный комплекс явлений, и формулирует закономерности, которым подчиняется эмпирический материал. Математический подход позволяет построить математические модели, с помощью которых можно проверить основные теоретические предположения, а также предлагает методы для первичной обработки экспериментальных данных и планирования эксперимента с таким расчетом, чтобы при небольших затратах ресурсов можно было получить достаточно надежные знания.

Математическое моделирование заключается в замене реально-го объекта его «образом» – математической моделью – и последующим его изучением.

Создавая учебное пособие, авторы ставили перед собой цель собрать воедино и систематически изложить материал, входящий в университетские курсы «Математическое моделирование», «Дискретные математические модели», «Оптимальное управление в экологии сообществ», и восполнить недостаток учебно-методического материала по этим дисциплинам. Пособие стало результатом многолетней работы авторов, читающих лекции и проводящих практические занятия по вышеперечисленным курсам, в него включены также результаты их научно-исследовательской работы.

Пособие состоит из шести глав. В каждой главе приводятся примеры моделей, иллюстрирующие применение основных теорем

и методов, а также список вопросов, предназначенных для самостоятельной работы. Каждый вопрос поставлен так, что в отдельности может являться темой для выпускной квалификационной работы или магистерской диссертации.

В первой главе раскрывается понятие математического моделирования, рассматриваются методы математического моделирования и их применение для биологических систем. Излагаются основные функции математических моделей, этапы математического моделирования.

Вторая глава посвящена изучению моделей, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены теоретические подходы к исследованию устойчивости решений динамических моделей типа «хищник–жертва», модели роста биомассы водорослей и модели развития лесонасаждений.

В третьей главе рассматривается задача оптимального управления, сформулированы необходимые условия оптимальности. Принцип максимума Понтрягина применен к задаче оптимального управления ростом биомассы водорослей. В третьей главе сформулированы также принцип максимума в интегральной форме для задачи с фазовыми ограничениями и фиксированным моментом времени, принцип максимума для задачи с нефиксированным временем процесса.

Четвертая глава содержит основные теоретические сведения об особых оптимальных управлениях и способах их построения, условие Келли и Коппа–Мойера, исследование особых оптимальных режимов в задачах оптимального управления ростом биомассы водорослей и лесонасаждениями.

В пятой главе рассматривается дискретная задача оптимального управления, которая имеет важное теоретическое и практическое самостоятельное значение, возникающая при численной реализации алгоритмов поиска оптимального решения. В данной главе сформулированы принцип максимума для дискретной задачи оптимального управления и метод динамического программирования.

Последняя, шестая, глава содержит основные сведения о численных методах решения задач оптимального управления, методах и алгоритмах построения оптимального решения на примере модели управления ростом биомассы водорослей, для которой проведено численное исследование и продемонстрировано применение

ние таких численных методов, как метод градиента, метод сопряженного градиента, метод Ньютона и метод штрафных функций.

В шестой главе рассмотрены методы решения краевых задач, возникающих при решении задач оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина, многокритериальная задача и способы ее решения, в том числе пример решения задачи оптимального управления ростом биомассы водорослей путем изменения уровня освещенности с помощью компромиссов Парето (построения множества Парето).

Учебное пособие включает в себя перечень основной и дополнительной литературы, темы для самостоятельных исследовательских работ, что поможет учащимся глубоко изучить вопросы математического моделирования и оптимального управления.