

УДК 517.928
ББК 22.161.6
К 93

*Печатается по решению редакционно издательского совета
Южного федерального университета*

*Монография подготовлена и издана в рамках национального проекта
«Образование» по «Программе развития федерального государственного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Южный федеральный университет» на 2007–2010 гг.»*

Рецензент
доктор физико-математических наук, заведующий
кафедрой вычислительной математики и математической
физики Южного федерального университета
М. Ю. Жуков

Куракин Л. Г., Юдович В. И.

К93 Устойчивость и бифуркации в системах с косимметрией:
монография / Л. Г. Куракин, В. И. Юдович — Ростов н/Д :
Изд-во ЮФУ, 2009. — 208 с.
ISBN 978-5-9275-0663-7

В монографии изложена общая теория локальных бифуркаций в динамических системах с косимметрией, обладающих в условиях общего положения непрерывным семейством равновесий с переменным спектром устойчивости. Исследованы бифуркации таких семейств равновесий, которые приводят к рождению вторичных и третичных стационарных режимов, а также автоколебательных периодических режимов.

Монография адресована научным работникам, преподавателям, аспирантам и студентам математических и физических факультетов.

ISBN 978-5-9275-0663-7 © Куракин Л. Г., В. И. Юдович, 2009
© Южный федеральный университет, 2009
© Оформление. Макет. Издательство
Южного федерального университета, 2009

Оглавление

Введение	6
I. Бифуркации, сопровождающие монотонную потерю устойчивости равновесия косимметричной динамической системы	21
Введение	21
1. Метод Ляпунова–Шмидта для уравнения с косимметрией	23
1.1. Постановка задачи и уравнение разветвления	23
1.2. Случай общего положения ($k = 1$)	27
1.3. Метод Ляпунова–Шмидта в случае двумерного ядра	28
1.4. Бифуркация общего положения для косимметрической системы	31
1.5. Случай полного вырождения линейной части уравнения разветвления	34
2. Метод центрального многообразия. Случай двукратного нулевого собственного значения	37
2.1. Случай двумерной жордановой клетки ($k = 2, \dim \ker A = 1$). Бифуркация устойчивых и неустойчивых дуг	39
2.2. Случай общего положения ($a \neq 0, r \neq 0$): нет локальных бифуркаций	40
2.3. Рождение неустойчивой дуги ($a \neq 0, r = 0, a_{03} < 0$)	41
2.4. Рождение пары дуг — устойчивой и неустойчивой ($a \neq 0, r = 0, a_{03} = 0, a_{04} \neq 0$)	41
2.5. Случай двумерного ядра ($k = 2, \dim \ker A = 2$). Седловая бифуркация и бифуркация рождения цикла равновесий «из воздуха»	44
2.6. Случай двумерного ядра: бифуркация семейства равновесий, сопровождаемая рождением малой неустойчивой дуги	45
2.7. Случай двумерного ядра: ответвление малого равновесного цикла от угловой точки семейства равновесий	49
3. Метод центрального многообразия. Случай трехкратного нулевого собственного значения	52

3.1.	Жорданова клетка. Рождение устойчивой дуги, образованной равновесиями разного типа	52
3.2.	Двумерное ядро. Бифуркации семейств равновесий, сопровождаемые внутренними бифуркациями	57
	Приложение. Выпрямление косимметричного векторного поля на плоскости	69
II. Бифуркация ответвления цикла в n-параметрическом семействе динамических систем с косимметрией		72
	Введение	72
1.	Постановка задачи	74
2.	Фазовые портреты и перестройка	78
2.1.	Главные семейства	78
2.2.	Развитие неустойчивой дуги без ответвления цикла	81
2.3.	Ответвление предельного цикла от равновесия, разделяющего устойчивую и неустойчивую дуги	83
2.4.	Ответвление предельного цикла от равновесия, разделяющего две устойчивые дуги	87
	Заключение	91
	Приложение А. Косимметрическая версия теоремы о неявной функции	95
	Приложение В. Сводка результатов	97
III. Ответвление предельного цикла от подмногообразия равновесий в системе с мультикосимметрией		99
1.	Метод Ляпунова–Шмидта	99
1.1.	Постановка задачи. Основные определения и гипотезы	99
1.2.	Линеаризованное уравнение	101
1.3.	Уравнение разветвления циклов	104
2.	Метод центрального многообразия	114
2.1.	Постановка задачи	114
2.2.	Бифуркация областей устойчивости	118
2.3.	Модельные семейства	121
2.4.	Ответвление предельного цикла без бифуркации областей устойчивости	123
2.5.	Ответвление предельного цикла в случае бифуркации областей устойчивости	124
2.6.	Случай общего положения. Предельный цикл не ответвляется, и области устойчивости не бифурцируют	125
IV. О бифуркациях равновесий при разрушении косимметрии динамической системы		127
1.	Постановка задачи и уравнения разветвления	127
2.	Случай общего положения ($k = 1$)	133
3.	Метод Ляпунова–Шмидта в случае двумерного ядра	137

V. Об устойчивости граничных равновесий в системах с косимметрией 146

1. Обращение теоремы о неявной функции для косимметрических систем	148
2. Критические случаи устойчивости	150
2.1. Критический случай трехкратного нулевого собственного значения	151
2.2. Критический случай двукратного нулевого и простой пары чисто мнимых собственных значений	152
2.3. Критический случай нулевого и пары чисто мнимых собственных значений (все они просты)	153
2.4. Уравнение на центральном многообразии. Влияние косимметрии на его ряд Тейлора	154
2.5. Критерии устойчивости и модельные системы	157
2.6. Устойчивость	159
2.7. Неустойчивость	163

VI. Ответвление двумерных инвариантных торов от семейства равновесий в системах с косимметрией 165

Введение	165
1. Метод центрального многообразия	167
1.1. Внутренние бифуркации на семействе равновесий	172
1.2. Отсутствие предельных циклов. Условия существования тора и анализ его спектра устойчивости	174
2. Метод Ляпунова–Шмидта	175
2.1. Линеаризованное уравнение	175
2.2. Уравнение разветвления торов	178
3. К задаче о квазипериодических решениях	188
Приложение А. Главные системы в резонансных случаях	193
А.1. Резонанс $1:2$, $\omega_1 = 2\omega_2$	193
А.2. Резонанс $1:3$, $\omega_1 = 3\omega_2$	194
А.3. Резонанс $1:1$, $\omega_1 = \omega_2$	195
Приложение В. Доказательство предложения 1.3	195
Заключение	197

Литература 200