

А
Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Самарская государственная сельскохозяйственная академия»

Е.В. Бунтова

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 21.03.02 – «Землеустройство и кадастры»

Кинель 2015

ББК22.1я7
УДК 519.2 (075)
Б91

Рецензенты:

д-р пед. наук, проф., зав. кафедрой «Высшая математика и ЭММ»
ФГБОУ ВПО «Самарский государственный экономический
университет»

С. И. Макаров;

д-р пед. наук, доцент, зав. кафедрой «Высшая математика»
ФГБОУ ВПО «Самарский государственный
архитектурно-строительный университет»

О.В. Юсупова

Бунтова, Е. В.

Б91 Прикладная математика: учебное пособие. – Кинель: РИЦ
СГСХА, 2015. – 133 с.

ISBN 978-5-88575-385-2

В учебном пособии рассмотрены основные понятия и методы теории погрешностей измерений, численные методы анализа математических моделей, численное интегрирование, численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, интерполяция функций, аппроксимация функций методом наименьших квадратов, классические методы математического программирования.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 21.03.02 – «Землеустройство и кадастры».

**ББК22.1я7
УДК 519.2 (075)**

ISBN 978-5-88575-385-2

© Бунтова Е. В., 2015
© ФГБОУ ВПО Самарская ГСХА, 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

Прикладная математика – это один из разделов математики, который включает создание и обоснование численных алгоритмов для решения сложных задач различных областей науки. Главная задача прикладной математики – фактическое нахождение решения с требуемой точностью.

Цель пособия «Прикладная математика» – формирование системы компетенций для решения профессиональных задач с эффективным использованием знаний о едином объекте недвижимости, с использованием современных технологий топографо-геодезических работ при проведении инвентаризации и межевания, землеустроительных и кадастровых работ, методов обработки результатов геодезических измерений, перенесением проектов землеустройства в натуру и определением площадей земельных участков.

Пособие состоит из 5 разделов, охватывающих элементарную теорию погрешностей измерений, численные методы анализа математических моделей, классические методы математического программирования, вопросы интерполяции и аппроксимации функций и численное интегрирование.

В разделе «Элементарная теория погрешностей измерений» рассматривается теория погрешностей измерений в геодезии. Особое внимание уделено видам и методам геодезических измерений.

В разделе «Численные методы анализа математических моделей» раскрываются общие понятия математических моделей и численных методов, рассматриваются методы решений алгебраических уравнений и систем линейных уравнений.

В разделе «Классические методы математического программирования» даются примеры задач, которые в процессе математического моделирования сводятся к задачам линейного программирования. Приводятся основные сведения о математическом аппарате линейного программирования. Излагается геометрический метод решения задачи линейного программирования с двумя переменными. Уделено внимание изложению алгоритмов симплексного метода решения задач линейного программирования, включая метод искусственного базиса и двойственный симплекс-метод. Рассматриваются вопросы применения теории двойственности линейного программирования и специальные задачи линейного

программирования на примере открытых и закрытых транспортных задач.

В разделе «Интерполяция и аппроксимация функций» рассматриваются интерполяционный полином и аппроксимация функции методом наименьших квадратов.

Раздел «Численное интегрирование» посвящен вопросам численного интегрирования методами прямоугольников, трапеции, Симпсона и методам решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Материал для самостоятельной работы студентов, словарь основных понятий помогут студентам закрепить теоретические знания на практике.

1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Основа проведения землеустроительных работ есть составление геодезических систем и геодезических карт земельных участков. Составление геодезических систем и геодезических карт предполагает работу с техническими средствами измерений, использование различных методов геодезических измерений [3].

Измерения в геодезии рассматривают как количественную характеристику, выражающую числовое значение измеренной величины и как качественную характеристику, выражающую точность полученных значений измеряемой величины [1].

Таким образом, правильный выбор приборов и методов измерений лежит в основе проведения геодезических работ. Всякое измерение неизбежно сопровождается погрешностью. Организация геодезических работ возможна при условии предварительного выполнения соответствующего расчета и учета влияния неизбежных погрешностей измерений.

Оценка полученных результатов измерений, определение влияния неизбежных погрешностей на полученные результаты, математическая обработка результатов измерений, уравнивание результатов измерений входит в организацию геодезических работ [6].

Задачу выбора прибора и методики измерений, выполнения измерений с заданной точностью решают на основе теории ошибок, в которую входят законы распределения погрешностей, критерии оценки точности измерений, способы определения вероятнейшего значения определяемой величины, правила предварительного вычисления ожидаемых точностей.

1.1. Шкала оценки. Номинальная шкала. Порядковая шкала

Составная часть анализа различного типа информации есть процедура измерения. Процесс измерения начинают с построения модели изучения свойства объекта, т.е. с качественной модели.

При математическом моделировании реального явления или процесса устанавливают, в каких видах шкал измерены те или

иные переменные [2]. Тип шкалы задает группу допустимых преобразований. Допустимые преобразования не меняют соотношений между объектами измерения.

В *номинальной шкале* допустимыми считают все взаимно однозначные преобразования. В номинальной шкале числа используют как метки. В номинальной шкале измерены, например, номера телефонов, автомашин, паспортов, пол людей.

В *порядковой шкале* числа используют для установления порядка между объектами. Простейший пример – это оценки знаний студентов. В порядковой шкале допустимыми считают все строго возрастающие преобразования. Оценки экспертов часто измерены в порядковой шкале. Типичный пример – это задачи ранжирования и классификации промышленных объектов, подлежащих экологическому страхованию. Мнения экспертов выражают в порядковой шкале, так как человек с меньшими затруднениями отвечает на вопросы качественного, например, сравнительного, характера, чем количественного. Проще сказать, какая из двух гирь тяжелее, чем указать их примерный вес в граммах.

При оценке экологических воздействий первая оценка – порядковая, например, природная среда стабильна – природная среда угнетена (деградирует).

Количественные шкалы наиболее распространенные в науке и практике – *шкалы отношений*. В них есть естественное начало отсчета – нуль, т.е. отсутствие величины, но нет естественной единицы измерения. По шкале отношений измерены большинство физических единиц, например масса тела, длина, заряд, цены в экономике. Допустимые преобразования в шкале отношений есть подобные (изменяющие только масштаб) или линейные возрастающие преобразования без свободного члена.

Для *абсолютной шкалы* результаты измерений – числа в обычном смысле слова. Например, число людей в комнате. Для абсолютной шкалы допустимо только тождественное преобразование.

Таким образом, процесс измерения включает в себя определение типа шкалы.

1.2. Теория погрешностей измерений в геодезии

1.2.1. Виды геодезических измерений

Геодезические измерения – измерения, проводимые в процессе топографо-геодезических работ [3]. В зависимости от характера геодезические измерения делят на абсолютные и относительные, по степени автоматизации измерения делят на визуальные и автоматизированные [3].

Геодезические измерения различают по признаку назначения измерений и по признаку измеряемой геодезической величины [5].

По признаку назначения геодезические измерения делят на следующие:

- базисные измерения – измерения, связанные с измерением длин базисов;
- астрономо-геодезические измерения – измерения, связанные с определением астрономических и геодезических координат;
- нивелирование – измерения, связанные с определением высот;
- геодинимические измерения – измерения, связанные с определением изменений положения геодезических пунктов во времени относительно принятых исходных пунктов и интерпретацией полученных результатов;
- створные измерения – измерения, связанные с определением отклонений положения пунктов от прямой линии;
- топографическая съемка – измерения, связанные с созданием плана объекта, с осуществляемыми на объекте измерениями в сочетании со сбором и анализом информации.

По признаку измеряемой геодезической величины измерения делят на следующие:

- угловые измерения – измерения, в которых измеряемая геодезическая величина есть горизонтальные или вертикальные углы;
- линейные измерения – измерения, в которых измеряемая геодезическая величина – длины сторон геодезических сетей;
- геодезические измерения превышений – измерения, в которых измеряемая геодезическая величина – разности высот пунктов;

- гироскопические измерения – угловые геодезические измерения, в которых измеряемая геодезическая величина – азимуты направлений;

- геодезические измерения координат – измерения, в которых измеряемая геодезическая величина – положение геодезических пунктов относительно исходных пунктов в заданной отсчетной системе.

Геодезические измерения классифицируют [5]:

- по функциональным особенностям средства измерений;
- по методу реализации измерительных операций;
- по характеру получаемой измерительной информации и математической обработки информации.

1.2.2. Методы геодезических измерений

Согласно стандартам отрасли [8] определено одиннадцать методов геодезических измерений.

Метод прямых геодезических измерений – метод, при котором значение измеряемой геодезической величины получают непосредственно.

Метод косвенных геодезических измерений – метод, при котором значение геодезической величины определяют как функцию других величин, полученных непосредственно.

Комбинационный метод – метод геодезических измерений, заключающийся в наблюдении геодезических величин, расположенных между смежными пунктами, и различные сочетания геодезических величин.

Метод приемов – метод геодезических измерений, заключающийся в неоднократных определениях одной и той же геодезической величины по единой методике.

Метод круговых приемов – метод измерений углов путем последовательного наблюдения визирных целей по кругу с повторным наблюдением начального направления.

Метод двойных измерений – метод, заключающийся в исполнении однородных геодезических измерений сериями, состоящими из двух наблюдений.

Метод повторений или реитераций – метод, заключающийся в определении n -кратного значения измеряемой геодезической величины и последующем вычислении искомого значения.

Метод измерений «вперед» – метод, заключающийся в наблюдении точки передней по ходу.

Метод измерений «из середины» – метод геодезических измерений, заключающийся в последовательном наблюдении смежных пунктов прокладываемого хода с помощью прибора, расположенного между ними.

Метод измерений «через точку» – метод геодезических измерений, выполняемых при установке прибора либо на четных, либо на нечетных пунктах хода.

Многоштативный метод измерений – метод геодезических измерений, заключающийся в ослаблении погрешностей центрирования путем установки одновременно на нескольких смежных пунктах сети штатив с подставками для размещения в них визирных целей или прибора.

1.2.3. Погрешности измерений

Погрешность результата измерения есть следствие действия многих факторов, каждый из которых порождает погрешность [2]. Погрешности отдельных факторов называют элементарными погрешностями. Алгебраическая сумма элементарных погрешностей есть *погрешность результата измерений*.

Математическая основа теории погрешностей измерений – теория вероятностей и математическая статистика.

Погрешности измерений разделяют по двум признакам [2]:

- по характеру действия погрешностей;
- по источнику происхождения погрешностей.

По характеру действия погрешности бывают:

- 1) грубые;
- 2) систематические;
- 3) случайные.

Грубые погрешности – это погрешности, превосходящие по абсолютной величине, установленный для данных условий измерений предел. Грубые погрешности есть результат просчетов исполнителя.

Систематические погрешности – это погрешности, которые по знаку или величине однообразно повторяются в многократных измерениях. Систематические погрешности есть результат неисправности измерительных приборов или методики измерений.

Случайными называют погрешности, размер и влияние которых на каждый отдельный результат измерения остаются неизвестными. Случайные погрешности подчинены вероятностным закономерностям, изучение которых позволяет получить более надежный результат и оценить точность результата.

По источнику происхождения погрешности бывают:

- 1) погрешности приборов;
- 2) внешние погрешности;
- 3) личные погрешности.

Погрешности приборов обусловлены несовершенством приборов.

Внешние погрешности обусловлены средой, в которой производят измерения (температура воздуха, различные излучения).

Личные погрешности обусловлены особенностями наблюдателя.

Грубые погрешности исключают из результатов измерений. Систематические погрешности ослабляют до минимального значения. Таким образом, проектирование измерений с необходимой точностью проводят, основываясь на свойствах случайных погрешностей.

Случайные погрешности обладают следующими свойствами [6]:

- 1) по абсолютной величине не могут превышать предельную погрешность;
- 2) положительные и отрицательные случайные погрешности одинаково часто встречаются в ряду измерений, что способствует выявлению систематических ошибок;
- 3) чем больше величина погрешности, тем реже погрешность встречается в ряду измерений;
- 4) среднее арифметическое случайных погрешностей измерений одной и той же величины, выполненных в одинаковых условиях, стремится к нулю.

Характеристикой точности отдельного измерения в теории погрешностей служит средняя квадратическая погрешность m , которую вычисляют по формуле

$$m = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2}{n}}, \quad (1.1)$$