МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В.В. Смагин

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА
# ВВОДНЫЙ КУРС

Учебное пособие для вузов

Воронежский государственный университет
Математический факультет
2017

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

## Содержание

*Доказательство.* Для $p = 1$ неравенство (4) очевидно. Рассмотрим случай $p > 1$. Из (2) и равенства $(p-1)q = p$ следует оценка

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k + v_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} |u_k|\,|u_k + v_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |v_k|\,|u_k + v_k|^{p-1} \leq$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^{n} |u_k + v_k|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^{n} |u_k + v_k|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} =$$

$$\left(\Big(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^p\Big)^{1/p}\right)\Big(\sum_{k=1}^{n} |u_k + v_k|^p\Big)^{1/q}. \tag{5}$$

Если $\sum_{k=1}^{n} |u_k + v_k|^p \neq 0$, то из (5) следует (4), так как $1 - 1/q = 1/p$. Если же упомянутая сумма равна нулю, то неравенство (4) очевидно. ♡

## §2. Определения и примеры метрических пространств

Пусть $X$ — произвольное непустое множество. Пусть каждой паре его элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие действительное число $\rho(x,y)$ такое, что для всех $x, y, z \in X$ выполняются следующие аксиомы:

1. $\rho(x,y) \geq 0, \quad \rho(x,y) = 0 \longleftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (аксиома симметрии);
3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (неравенство треугольника).

В таком случае число $\rho(x,y)$ называется *расстояние* между $x$ и $y$ или *метрикой* в множестве $X$. А само множество вместе с метрикой $\{X, \rho\}$ называется *метрическим пространством.*

• Задачи:

*2.1. Пусть $\rho(x,y)$ – метрика в $X$. Показать, что метриками в $X$ являются:*
$\rho_1(x,y) = \rho^{1/2}(x,y), \qquad \rho_2(x,y) = \ln[1 + \rho(x,y)],$
$\rho_3(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}, \qquad \rho_4(x,y) = \rho(x,y)[1 + \rho(x,y)]^{-1}.$

*2.2. Показать, что аксиомы метрики эквивалентны двум условиям:*

$$1) \quad \rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y, \quad 2) \quad \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z).$$

*2.3. Пусть $X$ – множество с метрикой $\rho(x,y)$. Показать, что для любых элементов $x, y, u, v \in \{X, \rho\}$:*

а) $|\rho(x,y) - \rho(x,u)| \leq \rho(y,u)$, б) $|\rho(x,u) - \rho(y,v)| \leq \rho(x,y) + \rho(u,v)$.

Примеры метрических пространств.

1. $\mathbb{R}^1$ – множество вещественных чисел (либо $\mathbb{C}^1$ – множество комплексных чисел) с метрикой $\rho(x,y) = |x - y|$.

2. $X$ – произвольное непустое множество с дискретной метрикой

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}.$$

3. $\mathbb{R}^n$ – множество $n$ – мерных векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с вещественными координатами (либо $\mathbb{C}^n$ – множество $n$ – мерных векторов с комплексными координатами) с метрикой, где $1 \le p < \infty$,

$$\rho(x,y) = \rho_p(x,y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Эти метрические пространства далее будем обозначать $\mathbb{R}^n_p$ и $\mathbb{C}^n_p$ соответственно. Заметим, что аксиома треугольника здесь следует из неравенства Минковского (4).

4. Вновь рассмотрим множество $\mathbb{R}^n$ (либо $\mathbb{C}^n$). Метрику здесь зададим выражением

$$\rho(x,y) = \rho_\infty(x,y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|.$$

Эти метрические пространства далее будем обозначать $\mathbb{R}^n_\infty$ и $\mathbb{C}^n_\infty$ соответственно.

5. Через $C[a,b]$ обозначим пространство числовых функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, где на функциях $x, y \in C[a,b]$ метрика задается выражением

$$\rho(x,y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|.$$

6. Через $C_1[a,b]$ обозначим пространство числовых функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, где на функциях $x, y \in C_1[a,b]$ метрика задается выражением

$$\rho(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt.$$

Для обоснования первой аксиомы метрики понадобится

Лемма 1. *Пусть на* $[a,b]$ *функция* $\varphi(t) \ge 0$, *непрерывна и* $\int_a^b \varphi(t)\, dt = 0$. *Тогда* $\varphi(t) \equiv 0$ *на* $[a,b]$.

*Доказательство.* Если $\varphi(t) \not\equiv 0$, то $(\exists c \in [a,b])\,[\varphi(c) > 0]$. В силу непрерывности функции $\varphi(t)$ имеется в $[a,b]$ целый отрезок $[\alpha,\beta] \ni c$ такой, что $(\forall t \in [\alpha,\beta])[\,\varphi(t) \ge \varphi(c)/2 > 0\,]$. Получим далее

$$\int\limits_a^b \varphi(t)\, dt = \int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\, dt + \int\limits_{t \notin (\alpha,\beta)} \varphi(t)\, dt \ge \int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\, dt \ge (\beta - \alpha)\varphi(c)/2 > 0,$$

что противоречит условию леммы. ♡

7. Через $M[a,b]$ обозначим пространство числовых функций, определенных и ограниченных на отрезке $[a,b]$, то есть таких, что $\sup_{a\le t\le b}|x(t)|<\infty$. На функциях $x,y\in M[a,b]$ метрика задается выражением

$$\rho(x,y)=\sup_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|.$$

Определение корректно, так как для всех $t\in[a,b]$

$$|x(t)-y(t)|\le|x(t)|+|y(t)|\le\sup_{a\le t\le b}|x(t)|+\sup_{a\le t\le b}|y(t)|=C<\infty.$$

8. Через $l_p$, где $1\le p<\infty$, обозначим пространство числовых последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots)$, суммируемых с $p$-ой степенью, то есть таких, что $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$. Метрика на элементах $x,y\in l_p$ задается выражением

$$\rho(x,y)=\rho_p(x,y)=\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\Bigr)^{1/p}. \tag{6}$$

Определение метрики корректно (ряд в (6) сходится), так как для всех $k\in\mathbb{N}$ справедлива оценка $|x_k-y_k|^p\le 2^p(|x_k|^p+|y_k|^p)$.

Докажем неравенство треугольника. Для любого $n\in\mathbb{N}$ из неравенства Минковского для $x,y,z\in l_p$ следует оценка

$$\Bigl(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\Bigr)^{1/p}\le\Bigl(\sum_{k=1}^{n}|x_k-z_k|^p\Bigr)^{1/p}+\Bigl(\sum_{k=1}^{n}|z_k-y_k|^p\Bigr)^{1/p}. \tag{7}$$

Так как все ряды $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p$, $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-z_k|^p$ и $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k-y_k|^p$ сходятся, то неравенство треугольника следует из (7) при $n\to\infty$.

9. Через $m$ обозначим пространство ограниченных числовых последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots)$, то есть таких, что $\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|<\infty$. Метрика на элементах $x,y\in m$ задается выражением

$$\rho(x,y)=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k-y_k|.$$

10. Через $s$ обозначим пространство произвольных числовых последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots)$. Метрика на элементах $x,y\in s$ задается выражением

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k-y_k|}{2^k\,(1+|x_k-y_k|)}\,. \tag{8}$$

Определение метрики корректно (ряд в (8) сходится). Аксиома треугольника следует из простого неравенства $\alpha(1+\alpha)^{-1} \leq \beta(1+\beta)^{-1}$, где $0 \leq \alpha \leq \beta$.

• Задачи:

*2.4. Показать, что* $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg}(x-y)|$ *является метрикой на* $\mathbb{R}^1$.

*2.5. Пусть функция* $\varphi(t)$ *определена и дважды непрерывно дифференцируема при* $t \geq 0$. *Кроме того,* $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$ *и* $\varphi''(t) \leq 0$. *Показать, что* $\rho(x, y) = \varphi(|x-y|)$ *является метрикой на* $\mathbb{R}^1$.

## §3. Шары и ограниченные множества

В метрическом пространстве $\{X, \rho\}$ *открытым (замкнутым) шаром* радиуса $r \geq 0$ с центром в точке $x_0 \in X$ называется множество

$B(x_0, r) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\} \qquad (\, B[x_0, r] = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) \leq r\}\,)$.

• Задачи:

*3.1. На плоскости* $\mathbb{R}^2$ *с метриками* $\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, $\rho_2(x, y) = (|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)^{1/2}$, $\quad \rho_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ *построить замкнутые шары* $B[(0, 0), 1]$.

*3.2. Может ли в метрическом пространстве шар радиуса 4 быть строгим подмножеством шара радиуса 3 ?*

*3.3. Показать, что если шар радиуса 7 в метрическом пространстве содержится в шаре радиуса 3, то эти шары совпадают.*

В метрическом пространстве $\{X, \rho\}$ множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если в $X$ существует замкнутый шар конечного радиуса, содержащий это множество.

• Задачи:

*3.4. Пусть в метрическом пространстве* $\{X, \rho\}$ *множество* $M \subset X$ *ограничено. Показать, что*

$$(\forall x_0 \in X)(\exists r > 0)(M \subset B[x_0, r]).$$

*3.5. Пусть множества* $A$ *и* $B$ *ограничены в метрическом пространстве* $\{X, \rho\}$. *Показать, что множество* $A \cup B$ *также ограничено в* $\{X, \rho\}$.

*3.6. Доказать, что множество* $M \subset C[a, b]$ *ограничено тогда и только тогда, когда* $(\exists K > 0)(\forall x \in M)(\forall t \in [a, b])(|x(t)| \leq K)$.

*3.7. Пусть* $\{x(t)\}$ *– множество дифференцируемых на* $[a, b]$ *функций таких, что* $(\exists K_1 \geq 0)(\exists K_2 \geq 0)(\forall x)(\forall t \in [a, b])\,[(|x(a)| \leq K_1) \wedge (|x'(t)| \leq K_2)]$. *Доказать, что множество* $\{x(t)\}$ *ограничено в пространстве* $C[a, b]$.

## §4. Сходимость в метрических пространствах

Пусть $\{X, \rho\}$ – метрическое пространство. Последовательность элементов $\{x_n\} \subset X$ *сходится* к элементу $x \in X$ по метрике, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. При этом используются обозначения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, либо $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

Свойства сходящихся последовательностей.

1. *В метрическом пространстве любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, причем, к тому же пределу.*

*Доказательство.* Пусть $\{x_n\} \subset X$ сходится к элементу $x \in X$ и $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$. Тогда числовая последовательность $\{\rho(x_{n_k}, x)\} \subset \{\rho(x_n, x)\}$. Поэтому $\rho(x_{n_k}, x) \to 0$ при $k \to \infty$. ♡

2. *Последовательность в метрическом пространстве может иметь не более одного предела.*

*Доказательство.* Пусть $\{x_n\} \subset X$ такая, что $x_n \to a$ и $x_n \to b$ при $n \to \infty$. Из оценки $0 \le \rho(a, b) \le \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b)$ при $n \to \infty$ получим $\rho(a, b) = 0$, то есть $a = b$. ♡

3. *Всякая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве ограничена.*

*Доказательство.* Пусть $\{x_n\} \subset X$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $\rho(x_n, x) \to 0$ и, следовательно, числовая последовательность $\{\rho(x_n, x)\}$ ограничена, то есть $(\exists r > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,[\,\rho(x_n, x) \le r\,]$. Таким образом, последовательность $\{x_n\} \subset B[x, r]$. ♡

4. *Пусть в метрическом пространстве даны две последовательности: $x_n \to x$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Тогда $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$ при $n \to \infty$.*

*Доказательство* следует из неравенства (задача 2.3(б))

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \le \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y). \quad \heartsuit$$

• Задача.

*4.1. Показать, что если в метрическом пространстве при $n \to \infty$ выполняется $x_n \to x$ и $\rho(x_n, y_n) \to 0$, то $y_n \to x$.*

Сходимость в пространстве $\mathbb{R}^n_p$.

Пусть $1 \le p < \infty$, последовательность $\{x^m\} \subset \mathbb{R}^n_p$ и $x^m \to x$ при $m \to \infty$, где $x^m = (x^m_1, x^m_2, \ldots, x^m_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Это означает, что при $m \to \infty$

$$\rho(x^m, x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x^m_k - x_k|^p\right)^{1/p} \to 0.$$

Но это возможно тогда и только тогда, когда $x^m_k \to x_k$ при $m \to \infty$ для всех