

УДК 517.9:512.8

М 419

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *В. Н. Гребенев*

д-р физ.-мат. наук, профессор *В. А. Селезнев*

Меграбов А. Г.

М 419 Дифференциальные инварианты группы эквивалентности и их приложения: монография / А. Г. Меграбов. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2022. — 482 с. — (Монографии НГТУ).

ISBN 978-5-7782-4679-9

Монография посвящена исследованию дифференциальных уравнений (ДУ), описывающих волновые процессы в неоднородных средах, свойств семейств кривых и поверхностей с помощью группового и геометрического анализа. Изучена группа эквивалентности уравнения эйконала и других ДУ и ее дифференциальные инварианты. На этой основе получены групповое расслоение широкого класса ДУ, новые дифференциальные тождества, новое описание кинематической задачи сейсмологии, точные решения, связи между различными ДУ, дифференциальные законы сохранения для уравнений эйконала, гидродинамики, семейств кривых и поверхностей и др. Эти результаты выявляют ряд новых возможностей группового и геометрического анализа.

Монография предназначена для специалистов, аспирантов, студентов, интересующихся методами математической физики, группового и геометрического анализа и их приложениями.

УДК 517.9:512.8

DOI 10.17212/978-5-7782-4679-9

ISBN 978-5-7782-4679-9

© Меграбов А. Г., 2022

© Новосибирский государственный
технический университет, 2022

UDC 517.9:512.8

M 419

Reviewers:

Professor *V. N. Grebenev*, D. Sc. (Phys.&Math.)

Professor *V. A. Seleznev*, D. Sc. (Phys.&Math.)

Megrabov A. G.

M 419 Differential invariants of the equivalence group and their applications: monograph / A. G. Megrabov. — Novosibirsk: NSTU Publisher, 2022. — 482 p. — (NSTU Monographs).

ISBN 978-5-7782-4679-9

The monograph is devoted to the study of differential equations (DEs) describing wave processes in inhomogeneous media, properties of families of curves and surfaces using group and geometric analysis. The equivalence group of the eikonal equation and other differential equations and its differential invariants are studied. On this basis, a group stratification of a wide DE class, new differential identities, a new description of the kinematic seismic problem, exact solutions, relationships between different DEs, differential conservation laws for the eikonal equations, hydrodynamics, families of curves and surfaces, etc. are obtained. These results reveal a number of new possibilities of group and geometric analysis.

The monograph is intended for specialists, graduate and undergraduate students specializing in the methods of mathematical physics, group and geometric analysis and their applications.

UDC 517.9:512.8

DOI 10.17212/978-5-7782-4679-9

ISBN 978-5-7782-4679-9

© Megrabov A. G., 2022

© Novosibirsk State Technical
University, 2022

Оглавление

Список основных обозначений.....	7
Предисловие.....	9
Введение.....	15
Цель работы и ее основные направления.....	16
Основные результаты.....	17
Результаты по основным направлениям исследований и краткий библиографический обзор.....	39
Методы исследований.....	69
ЧАСТЬ I. Общая схема предлагаемого группового подхода	
Глава 1. Общая схема предлагаемого подхода к групповому анализу дифференциальных уравнений $\mathcal{F}[\mathbf{u}, \mathbf{a}] = 0$ с переменными коэффициентами (параметрами) $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \dots$	71
1.1. Предлагаемый подход к выбору и отысканию допускае- мой группы при групповом анализе дифференциальных уравнений $\mathcal{F}[\mathbf{u}, \mathbf{a}] = 0$ с произвольными переменными коэффициентами (параметрами) $\mathbf{a}(\mathbf{x})$: введение равно- правия $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и вычисление допускаемой группы в пространстве $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^1 = \mathbf{u}, \mathbf{u}^2 = \mathbf{a}) \dots$	71
1.2. Основные применяемые обозначения и термины груп- пового анализа. Задача группового расслоения (краткое описание).....	82
1.3. Общая схема предлагаемого группового подхода и ло- гическая структура монографии в гл. 1–4. Обратная за- дача группового расслоения.....	87

Часть II. Двумерный случай

Глава 2. Рассматриваемая группа G и ее свойства. Построение группового расслоения (в явном виде) для широкого класса дифференциальных уравнений с переменным коэффициентом (параметром) $u^2(x, y)$	97
2.1. Группа G . Ее инварианты, дифференциальные инварианты первого и второго порядка, операторы инвариантного дифференцирования	100
2.2. Основные тождества и связи между дифференциальными инвариантами группы G . Связь группы G с дифференциальной геометрией	106
2.3. Теорема о базисе дифференциальных инвариантов группы G	111
2.4. Групповое расслоение для широкого класса дифференциальных уравнений с произвольным переменным параметром $u^2(x, y)$	129
2.5. Примеры классических линейных и нелинейных уравнений математической физики с произвольным переменным коэффициентом (параметром) $u^2(x, y)$, допускающих группу G , для которых теоремы п. 2.4.1, 2.4.2 дают групповое расслоение	144
Глава 3. Разрешающие системы группового расслоения как новый класс дифференциальных уравнений, допускающих представление Лакса. Некоторое новое дифференциальное тождество как результат выполненного группового анализа	151
3.1. Различные формы системы R и разрешающей системы RE	154
3.2. Разрешающие системы группового расслоения как новый класс дифференциальных уравнений, допускающих представление Лакса. Построение пары Лакса в явном виде	163

3.3. Некоторое новое дифференциальное тождество как результат применяемого группового подхода и следствия из него	169
Глава 4. Приложения результатов группового подхода, полученных в гл. 1–3, к конкретным дифференциальным уравнениям математической физики с произвольным переменным коэффициентом (параметром) $u^2(x, y)$	177
4.1. Уравнение эйконала и кинематическая задача сейсмики (геометрической оптики). Новое описание с помощью группового подхода	187
4.2. Преобразования некоторых нелинейных дифференциальных уравнений с произвольным переменным коэффициентом (параметром) к классическим обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью группового подхода. Групповое расслоение и представление Лакса для них	224
4.3. Волновое уравнение с произвольной переменной скоростью распространения волн. Групповое расслоение и представление Лакса. Сведение обратной задачи к прямой задаче для разрешающей системы. Определение функционалов в локальных обратных задачах	232
4.4. Определение точных инвариантно-групповых решений с помощью метода группового расслоения	250
Глава 5. Законы сохранения и другие дифференциальные тождества для плоских векторных полей и для семейств плоских кривых. Их геометрический смысл и связь с группой G	267
5.1. Поля $\mathbf{T}(\mathbf{v})$ и $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$. Основное тождество. Дивергентное тождество (закон сохранения) для поля единичных векторов $\boldsymbol{\tau}(x, y)$ на плоскости. Обобщение тождества $\operatorname{div} \mathbf{T} = \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{v}) = 0$, где $\mathbf{v} = \operatorname{grad} u(x, y)$, для произвольного плоского векторного поля $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y)$	272

5.2. Дивергентные формулы (законы сохранения) в дифференциальной геометрии плоских кривых (законы сохранения для семейств плоских кривых)	280
5.3. Случаи плоского потенциального и соленоидального поля $\mathbf{v}(x, y)$. Тожества для векторных полей \mathbf{T} , $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$, \mathbf{S}^* , \mathbf{Q} , $\mathbf{V} = \mathbf{v} ^2 \mathbf{T}$ и законы сохранения. Дифференциальные тождества для скалярной функции $u(x, y)$, связывающие ее лапласиан, модуль и угол направления ее градиента	291
5.4. Геометрический смысл закона сохранения $\operatorname{div} \mathbf{S}^* = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{v}) = 0$. Способы его вывода	295
Глава 6. Формулы дифференциальной геометрии, полученные с помощью тождеств § 5.3, 5.4, и их связи с группой G	301
6.1. Дивергентное представление гауссовой кривизны поверхности, заданной графиком, в трехмерном евклидовом и псевдоевклидовом пространстве	302
6.2. Формулы, выражающие гауссову кривизну поверхности и полную (интегральную) кривизну области на ней через дифференциальные параметры Бельтрами	304
6.3. Формулы, содержащие геодезическую кривизну	307
Глава 7. Дифференциальные законы сохранения и другие тождества для уравнений математической физики. Их геометрический смысл. Связь между уравнением Монжа — Ампера и уравнением для функции тока	309
7.1. Гидродинамические уравнения Эйлера и уравнение Монжа — Ампера	312
7.2. Квазилинейное уравнение эллиптического типа	318
7.3. Уравнение эйконала	318

Часть III. Трехмерный случай

Глава 8. Группа G_{10} (трехмерный аналог группы G двумерного случая) и ее свойства	331
8.1. Основная группа (эквивалентности), допускаемая трехмерным уравнением эйконала в пространстве $(x, y, z, t, u^1 = u, u^2 = n^2)$. Группа G_{10} и ее базисные операторы	334
8.2. Дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования группы G_{10}	336
8.3. Выражение скалярной кривизны R через дифференциальные инварианты группы G_{10} (трехмерный аналог формулы (8.1))	341
Глава 9. О некоторых формулах для семейств кривых и поверхностей и дивергентных представлениях Ю. А. Аминова	345
9.1. Предварительные сведения	347
9.2. Векторные поля $S(\tau)$, S^* в трехмерном случае. Поля A_1 , A_2 , R^* . Формулы для $\operatorname{div} S(\tau)$, $\operatorname{div} S^*$	351
9.3. Инвариантные формы векторов $\operatorname{rot} R^*$, A_1 , A_2	354
9.4. Связь между величинами $\operatorname{div} S(\tau) = -2K$, κ , τ , ν , β . О законах сохранения для семейства кривых L_τ	355
9.5. Соленоидальное представление вектора P через поле R^*	357
9.6. Свойства семейства $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ	357
9.7. О связях между характеристиками взаимно ортогональных семейств кривых и поверхностей	360
9.8. О законах сохранения для семейства поверхностей	367
9.9. Трехмерные аналоги вида $\operatorname{div}\{S(\tau) - \Phi\} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\{T(v) - \Phi\} = 0$ двумерного закона сохранения $\operatorname{div} S(\tau) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} S^* = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} T(v) = 0$	372
9.10. Дополнительные формулы для полей $S(\tau)$, $T(v)$, $V = v ^2 T(v)$ в случае потенциального поля $v(x, y, z)$	374

Глава 10. Приложения результатов главы 9 к уравнениям математической физики в трехмерном случае	377
10.1. Законы сохранения для гидродинамических уравнений Эйлера	377
10.2. Законы сохранения и другие формулы для семейств лучей и фронтов и для уравнения эйконала	381
Заключение	387
I. Общие выводы по главам 1–4	387
II. О дифференциальных тождествах, найденных в § 2.2, 3.3, 5.1–5.3, и их приложениях в главах 6, 7	389
III. Общие выводы по главам 8–10 трехмерного случая ...	391
IV. Области исследования и их взаимодействие	392
Приложение 1. Об ограничениях, которым должны удовлетворять переменный параметр $n^2(x) = 1/c^2(x)$ в волновом уравнении и уравнении эйконала в силу определяющих уравнений алгебры Ли основной группы, допускаемой этими уравнениями в пространствах $(x, y, t, u = u^1)$, $(x, y, z, t, u = u^1)$, $(x, y, u = u^1)$	393
1.1. О группе точечных преобразований, допускаемой волновым уравнением в пространстве (x, y, z, t, u) и (x, y, t, u)	393
1.2. О группе точечных преобразований, допускаемой уравнением эйконала в пространстве (x, y, τ) и (x, y, t, τ) ..	397
Приложение 2. Основная группа точечных преобразований, допускаемая волновым уравнением в пространстве $(x, y, t, u^1 = u, u^2 = 1/c^2)$ и $(x, y, z, t, u^1 = u, u^2 = 1/c^2)$..	401
2.1. Случай пространства $(x, y, t, u^1 = u, u^2 = 1/c^2)$	401
2.2. Случай пространства $(x, y, z, t, u^1 = u, u^2 = 1/c^2)$	412
Приложение 3. Основная группа, допускаемая уравнением эйконала в пространстве $(x, y, u^1 = \tau, u^2 = n^2)$ и $(x, y, t, u^1 = \tau, u^2 = n^2)$	417

3.1. Случай, когда t фиксировано	417
3.2. Случай, когда t преобразуется вместе с $x, y, u^1 = \tau, u^2 = n^2$	419
Приложение 4. Вычисление коммутатора для любых двух операторов X и \tilde{X} вида (2.1.1) группы G	421
Приложение 5. Базисные операторы группы G_{10} в развернутом виде. Коммутационные соотношения	422
Приложение 6. Первое продолжение базисных операторов группы G_{10}	425
Приложение 7. Второе продолжение базисных операторов группы G_{10}	428
Литература	432

Contents

List of main symbols	7
Preface	9
Introduction	15
Research objective and its main areas	16
Main results	17
Results in the main areas of research and a brief bibliographic review	39
Research methods	69

PART I. GENERAL SCHEME OF THE PROPOSED GROUP APPROACH

Chapter 1. A general scheme of the proposed approach to the group analysis of differential equations $\mathcal{F}[\mathbf{u}, \mathbf{a}] = 0$ with variable coefficients (parameters) $\mathbf{a}(\mathbf{x})$	71
1.1. The proposed approach to the choice and search of the admissible group in the group analysis of differential equations $\mathcal{F}[\mathbf{u}, \mathbf{a}] = 0$ with arbitrary variable coefficients (parameters) $\mathbf{a}(\mathbf{x})$: introduction of equality $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ and $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ and calculation of the admissible group in the space $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^1 = \mathbf{u}, \mathbf{u}^2 = \mathbf{a})$	71
1.2. The main designations used and terms of group analysis. The group stratification problem (brief description)	82
1.3. A general scheme of the proposed group approach and the logical structure of the monograph in Chapters 1–4. An inverse group stratification problem	87

PART II. A TWO-DIMENSIONAL CASE

Chapter 2. The G group and its properties. Construction of a group stratification (in explicit form) for a wide class of differential equations with a variable coefficient (parameter) $u^2(x, y)$	97
2.1. The G group. Its invariants, differential invariants of the first and second order, operators of invariant differentiation	100
2.2. Basic identities and relations between differential invariants of the G group. The relation of the G group with differential geometry	106
2.3. The theorem on the basis of differential invariants of the group G	111
2.4. A group stratification for a wide class of differential equations with an arbitrary variable parameter $u^2(x, y)$	129
2.5. Examples of classical linear and nonlinear equations of mathematical physics with an arbitrary variable coefficient (parameter) $u^2(x, y)$ allowing the G group for which the theorems of § 2.4.1, 2.4.2 give a group stratification	144
Chapter 3. Resolving group stratification systems as a new class of differential equations allowing the Lax representation. Some new differential identity as a result of the performed group analysis	151
3.1. Different forms of the R system and the RE resolving system	154
3.2. Resolving group stratification systems as a new class of differential equations allowing the Lax representation. Explicit construction of a Lax pair	163
3.3. Some new differential identity as a result of the applied group approach and a corollary from it	169

Chapter 4. Applications of the results of the group approach obtained in Chapters 1-3 to specific differential equations of mathematical physics with an arbitrary variable coefficient (parameter) $u^2(x, y)$.	177
4.1. The eikonal equation and the kinematic problem of seismic (geometric optics). A new description using a group approach.....	187
4.2. Transformations of some nonlinear differential equations with an arbitrary variable coefficient (parameter) to classical ordinary differential equations using a group approach. Group stratification and Lax representation for them....	224
4.3. The wave equation with an arbitrary variable velocity of wave propagation. Group stratification and Lax representation. Reduction of the inverse problem to the direct problem for a resolving system. Definition of functionals in local inverse problems	232
4.4. Determination of exact invariant-group solutions using the group stratification method	250
Chapter.5. Conservation laws and other differential identities for plane vector fields and for families of plane curves. Their geometric meaning and relation with the G group.....	267
5.1. Fields $\mathbf{T}(\mathbf{v})$ and $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$. Basic identity. Divergent identity (conservation law) for the field of unit vectors $\boldsymbol{\tau}(x, y)$ on the plane. Generalization of the identity $\text{div} \mathbf{T} = \text{div} \mathbf{T}(\mathbf{v}) = 0$, where $\mathbf{v} = \text{grad } u(x, y)$, for an arbitrary flat vector field $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y)$	272
5.2. Divergent formulas (conservation laws) in differential geometry of plane curves (conservation laws for families of plane curves).....	280
5.3. Cases of flat potential and solenoidal fields $\mathbf{v}(x, y)$. Identities for vector fields \mathbf{T} , $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$, \mathbf{S}^* , \mathbf{Q} , $\mathbf{V} = \mathbf{v} ^2 \mathbf{T}$ and conservation laws. Differential identities for the scalar function $u(x, y)$ relating its Laplacian, modulus, and the direction angle of its gradient	291

5.4. The geometric meaning of the conservation law $\operatorname{div} \mathbf{S}^* = 0$ $\Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{v}) = 0$. Ways to derive it	295
--	-----

Chapter 6. Differential geometry formulas obtained using the § 5.3, 5.4 identities and their relation with the G group	301
--	------------

6.1. Divergent representation of the Gaussian curvature of a graphed surface in the three-dimensional Euclidean and the pseudo-Euclidean space	302
6.2. Formulas expressing the Gaussian curvature of a surface and the total (integral) domain curvature on it in terms of differential the Beltrami parameters	304
6.3. Formulas containing geodesic curvature.....	307

Chapter 7. Differential conservation laws and other identities for the equations of mathematical physics, their geometric meaning. Relationship between the Monge — Ampere equation and the equation for the stream function	309
---	------------

7.1. Euler's hydrodynamic equations and the Monge — Ampere equation	312
7.2. A quasi-linear equation of an elliptic type	318
7.3. The eikonal equation.....	318

PART III. A 3D CASE

Chapter 8. The group G_{10} (a three-dimensional analogue of the group G in the two-dimensional case) and its properties.....	331
--	------------

8.1. The basic equivalence group allowed by the three-dimensional eikonal equation in the space $(x, y, z, t, u^1 = u, u^2 = n^2)$. The group G_{10} and its basic operators.	334
8.2. Differential invariants and operators of invariant differentiation of the group G_{10}	336

8.3. Expression of the scalar curvature R in terms of the differential invariants of the group G_{10} (a three-dimensional analog of formula (8.1))	341
Chapter 9. On some formulas for the family of curves and surfaces and on Yu.A. Aminov's divergence representations	345
9.1. Preliminary information	347
9.2. Vector fields $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$, \mathbf{S}^* in the three-dimensional case. Fields \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{R}^* . Formulas for $\operatorname{div} \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$, $\operatorname{div} \mathbf{S}^*$	351
9.3. Invariant forms of vectors $\operatorname{rot} \mathbf{R}^*$, \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2	354
9.4. Relationship between the quantities $\operatorname{div} \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = -2K$, \varkappa , $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$. On conservation laws for the family of curves L_τ	355
9.5. Solenoidal representation of the vector \mathbf{P} in terms of the field \mathbf{R}^*	357
9.6. Properties of the family $\{S_\tau\}$ of the surfaces S_τ	357
9.7. On relationships between characteristics of mutually orthogonal families of curves and surfaces	360
9.8. On conservation laws for a family of surfaces	367
9.9. 3D analogues of the form $\operatorname{div} \{\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{\Phi}\} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \{\mathbf{T}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\Phi}\} = 0$ of the two-dimensional conservation law $\operatorname{div} \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{S}^* = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{v}) = 0$	372
9.10. Additional formulas for the fields $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$, $\mathbf{T}(\mathbf{v})$, $\mathbf{V} = \mathbf{v} ^2 \mathbf{T}(\mathbf{v})$ in the case of the potential field $\mathbf{v}(x, y, z)$	374
Chapter 10. Applications of the results of Chapter 9 to the equations of mathematical physics in the three-dimensional case	377
10.1. Conservation laws for hydrodynamic Euler equations	377
10.2. Conservation laws and other formulas for families of rays and fronts and for the eikonal equation	381
Conclusion	387
I. General conclusions for Chapters 1–4	387

II. On differential identities found in § 2.2, 3.3, 5.1–5.3 and their applications in Chapters 6 and 7.....	389
III. General conclusions on the three-dimensional case in Chapters 8–10	391
IV. Areas of research and their interaction	392
Application 1. On the restrictions that must be satisfied by the variable parameter $n^2(x) = 1/c^2(x)$ in the wave equation and the eikonal equation by virtue of the defining equations of the Lie algebra of the main group allowed by these equations in the spaces $(x, y, t, u = u^1)$, $(x, y, z, t, u = u^1)$, $(x, y, u = u^1)$.	393
1.1. On the group of point transformations allowed by the wave equation in the spaces (x, y, z, t, u) and (x, y, t, u)	393
1.2. On the group of point transformations allowed by the eikonal equation in the spaces (x, y, τ) and (x, y, t, τ)	397
Application 2. The main group of point transformations allowed by the wave equation in the spaces $(x, y, t, u^1 = u, u^2 = 1/c^2)$ and $(x, y, z, t, u^1 = u, u^2 = 1/c^2)$	401
2.1. The case of the space $(x, y, t, u^1 = u, u^2 = 1/c^2)$	401
2.2. The case of the space $(x, y, z, t, u^1 = u, u^2 = 1/c^2)$	412
Application 3. The main group allowed by the eikonal equation in the spaces $(x, y, u^1 = \tau, u^2 = n^2)$ and $(x, y, t, u^1 = \tau, u^2 = n^2)$	417
3.1. The case when t is fixed	417
3.2. The case when t is transformed together with $x, y, u^1 = \tau, u^2 = n^2$	419
Application 4. Calculation of the commutator for any two operators X and \tilde{X} in the form (2.1.1) of the group G	421
Application 5. Basic operators of the group G_{10} in an expanded form	422

Application 6. The first continuation of the basic operators of the group G_{10}.....	425
Application 7. The second continuation of the basic operators of the group G_{10}	428
References	432