УДК 532.522.2:538.4

МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СТРУЕ С ТОКОМ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. СТОЛКНОВЕНИЕ ЗАМАГНИЧЕННЫХ СТРУЙ

В. В. Никулин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках магнитогидродинамического подхода выведена система уравнений, описывающая нелинейную эволюцию длинноволновых осесимметричных возмущений на жидкой проводящей струе с поверхностным электрическим током, расположенной вдоль оси проводящего твердого цилиндра в продольном магнитном поле. Считается, что жидкость невязкая, несжимаемая и, так же как стенки цилиндра, идеально проводящая. Показано, что если продольное поле однородное, а осевое течение бессдвиговое, то в зависимости от параметров задачи данная система может быть либо гиперболической, либо эллиптически-гиперболической. Определены границы областей гиперболичности и эллиптичности в пространстве решений. В области гиперболичности получены уравнения характеристик и условия на них. Рассмотрена задача о распаде разрыва скорости на струе. Найдены условия, когда существует непрерывное автомодельное решение в области гиперболичности, соответствующее столкновению струй.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, струя, длинноволновое приближение.

Введение. Аналитические исследования эволюции возмущений на жидких проводниках со свободными границами до настоящего времени выполнялись в линейном приближении и в основном спектральными методами [1–3]. В последнее время для этих задач удалось применить прямой метод Ляпунова [4]. Однако аналитических исследований нелинейной стадии развития возмущений проведено недостаточно.

При изучении нелинейных задач из-за их сложности часто используются различные приближенные модели, описывающие существенные особенности рассматриваемых процессов. Одним из таких упрощений является асимптотическое приближение длинных волн или мелкой воды, используемое при исследовании волн в жидкости [5, 6]. В рамках модели мелкой воды оказалось возможным исследовать важные закономерности нелинейных эффектов, характерных для рассматриваемых течений, разработать точную теорию, а также решить прикладные задачи. Кроме того, данная теория получила математическое обоснование при изучении течения однородной жидкости в тонком слое [7, 8].

В настоящей работе длинноволновое приближение распространяется на случай струйного МГД-течения со свободной границей. Предложена модель, в рамках которой описывается нелинейное поведение длинноволновых возмущений на жидкой проводящей струе с поверхностным электрическим током в продольном магнитном поле. Данная модель позволяет выполнять аналитические исследования и имеет определенный физический смысл,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00614).

что подтверждают результаты, полученные в случае, когда продольное магнитное поле однородное, а осевое течение бессдвиговое.

1. Постановка задачи. Изучается жидкая проводящая струя неограниченной длины в продольном магнитном поле, по поверхности которой течет постоянный электрический ток J. Струя расположена вдоль оси бесконечно проводящего цилиндра радиуса r_0. Вводится цилиндрическая система координат (r^*, φ, z^*), ее ось z^* совпадает с осью струи. Используются следующие обозначения: v_1, v_2, v_3, H_1, H_2, H_3, H_1^*, H_2^*, H_3^* — компоненты скорости жидкости, магнитного поля внутри и вне струи, соответствующие системе координат (r^*, φ, z^*), P — давление, ρ — плотность, t^* — время. Полагается, что при движении жидкости в проводящей струе $v_2 \equiv 0$, $H_2 \equiv 0$. Кроме того, считается, что это движение является осесимметричным, а сама жидкость — невязкой, несжимаемой и идеально проводящей. Действие сил поверхностного натяжения на свободной границе струи не учитывается.

В силу данных предположений уравнения одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики [9] принимают вид

$$\begin{gathered}
\rho\Big(\frac{\partial v_1}{\partial t^*} + v_1\,\frac{\partial v_1}{\partial r^*} + v_3\,\frac{\partial v_1}{\partial z^*}\Big) = -\frac{\partial P_*}{\partial r^*} + \frac{H_1}{4\pi}\,\frac{\partial H_1}{\partial r^*} + \frac{H_3}{4\pi}\,\frac{\partial H_1}{\partial z^*},\\
\rho\Big(\frac{\partial v_3}{\partial t^*} + v_1\,\frac{\partial v_3}{\partial r^*} + v_3\,\frac{\partial v_3}{\partial z^*}\Big) = -\frac{\partial P_*}{\partial z^*} + \frac{H_1}{4\pi}\,\frac{\partial H_3}{\partial r^*} + \frac{H_3}{4\pi}\,\frac{\partial H_3}{\partial r^*},\\
\frac{\partial (Ar^*)}{\partial t^*} + v_1\,\frac{\partial (Ar^*)}{\partial r^*} + v_3\,\frac{\partial (Ar^*)}{\partial z^*} = 0,\\
H_1 = -\frac{\partial A}{\partial z^*}, \qquad H_3 = \frac{1}{r^*}\,\frac{\partial (Ar^*)}{\partial r^*},\\
\frac{1}{r^*}\,\frac{\partial (v_1 r^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial v_3}{\partial z^*} = 0.
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $P_* \equiv P + (H_1^2 + H_3^2)/(8\pi)$ — модифицированное давление; A — азимутальная компонента векторного потенциала (магнитная проницаемость проводящей струи полагается равной единице).

Вне струи при пренебрежении током смещения уравнения магнитного поля имеют вид

$$\frac{\partial H_1^*}{\partial z^*} - \frac{\partial H_3^*}{\partial r^*} = 0, \qquad H_2^* = \frac{2J}{r^*}, \qquad \frac{\partial H_3^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*}\,\frac{\partial (H_1^* r^*)}{\partial r^*} = 0. \tag{1.2}$$

На оси проводящей струи, ее границе $(r^* = r_1(z^*, t^*))$ и стенках цилиндра ставятся следующие краевые условия:

$$\begin{gathered}
v_1 = 0, \qquad H_1 = 0 \qquad (r^* = 0),\\
P_* = \frac{(H_1^*)^2 + (H_2^*)^2 + (H_3^*)^2}{8\pi}, \quad v_1 = \frac{\partial r_1}{\partial t^*} + v_3\,\frac{\partial r_1}{\partial z^*} \qquad (r^* = r_1(z^*, t^*)),\\
H_1 - H_3\,\frac{\partial r_1}{\partial z^*} = 0, \qquad H_1^* - H_3^*\,\frac{\partial r_1}{\partial z^*} = 0 \qquad (r^* = r_1(z^*, t^*)),\\
H_1^* = 0 \qquad (r^* = r_0).
\end{gathered} \tag{1.3}$$

При переходе к длинноволновому приближению введем безразмерные переменные и величины t, η, z, q, w, p_*, h, H, a, h^*, æ, H^*:

$$\begin{gathered}
r^{*2} = \eta L^2\delta^2, \quad z^* = zL, \quad t^* = tL/v_0, \quad 2v_1 r^* = qv_0 L\delta^2, \quad v_3 = wv_0, \quad P_* = p_*\rho v_0^2,\\
2H_1 r^* = hL\delta^2 H_0, \quad H_3 = HH_0, \quad 2Ar^* = a\delta^2 L^2 H_0,
\end{gathered}$$

$$2H_1^* r^* = h^* L \delta^2 H_0, \quad H_2^* r^* = \text{æ} L \delta H_0, \quad H_3^* = H^* H_0.$$

Здесь L — характерный масштаб вдоль оси z^*; H_0 — характерная величина магнитного поля, равная H_2^* при $r^* = r_{10}$ ($H_0 = 2J/r_{10}$); r_{10} — характерный радиус струи; $v_0 = H_0/(4\pi\rho)^{1/2}$ — характерная скорость; $\delta = r_{10}/L$. Считается, что $\delta \ll 1$. В безразмерных переменных уравнения (1.1), (1.2) запишутся в виде

$$\begin{gathered} \delta^2(q_t + qq_\eta - q^2/(2\eta) + wq_z) = -4\eta p_{*\eta} + \delta^2(hh_\eta - h^2/(2\eta) + Hh_z), \\ w_t + qw_\eta + ww_z = -p_{*z} + hH_\eta + HH_z, \qquad q_\eta + w_z = 0, \\ a_t + qa_\eta + wa_z = 0, \qquad h = -a_z, \qquad H = a_\eta; \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\delta^2 h_z^* - 4\eta H_\eta^* = 0, \qquad \text{æ} = 1, \qquad H_z^* + h_\eta^* = 0. \tag{1.5}$$

Здесь и далее нижний индекс обозначает соответствующую частную производную. Краевые условия (1.3) принимают вид

$$\begin{gathered} q = 0, \qquad h = 0 \qquad (\eta = 0), \\ q = \eta_{1t} + w\eta_{1z} \qquad (\eta = \eta_1), \\ p_* = \delta^2 (h^*)^2/(8\eta_1) + 1/(2\eta_1) + (H^*)^2/2 \qquad (\eta = \eta_1), \\ h - H\eta_{1z} = 0 \qquad (\eta = \eta_1); \end{gathered} \tag{1.6}$$

$$h^* - H^*\eta_{1z} = 0 \qquad (\eta = \eta_1), \quad h^* = 0 \ \ (\eta = \eta_0), \tag{1.7}$$

где $\eta_1(t, z)$ и η_0 соответствуют $r_1(t, z)$ и r_0.

При переходе в (1.4)–(1.7) к длинноволновому приближению слагаемые, пропорциональные δ^2, опускаются. В этом случае система (1.5) с условиями (1.7) имеет решение $h^* = H_z^*(\eta_0 - \eta)$, $H^* = H^*(t, z) = \Phi/(\eta_0 - \eta_1)$, где $\Phi = \mathrm{const}$ — безразмерный осевой поток магнитного поля между струей и стенками цилиндра. Тогда условие для p_* из (1.6) (с учетом $\delta^2 \to 0$) принимает вид

$$p_* = 1/(2\eta_1) + \Phi^2/[2(\eta_0 - \eta_1)^2]. \tag{1.8}$$

Для системы (1.4) длинноволновое представление не является окончательным, поскольку она может быть еще упрощена путем перехода (см. [4, 10]) к смешанным эйлерово-лагранжевым переменным t', z', ν, определяемым соотношениями

$$t = t', \qquad z = z', \qquad \eta = R(t', z', \nu), \qquad \nu \in [0, 1].$$

При этом полагается, что функция R удовлетворяет уравнению и краевым условиям

$$q = R_{t'} + wR_{z'}, \qquad R(t', z', 0) = 0, \qquad R(t', z', 1) = \eta_1(t', z'). \tag{1.9}$$

Таким образом, переменную ν можно интерпретировать как номер соответствующей жидкой линии. Кроме того, из (1.9) следует, что краевые условия (1.6) (для функции q) выполняются автоматически. Отметим, что при такой замене переменных неизвестная свободная граница $\eta = \eta_1$ переходит в известную фиксированную границу $\nu = 1$.

В новых смешанных эйлерово-лагранжевых переменных (при пренебрежении слагаемыми с δ^2) уравнения (1.4) запишутся в виде

$$\begin{gathered} p_{*\nu} = 0, \\ R_\nu(w_t + ww_z) = -R_\nu p_{*z} + hH_\nu + R_\nu HH_z - HR_zH_\nu, \\ q_\nu + R_\nu w_z - R_z w_\nu = 0, \\ a_t + wa_z = 0, \end{gathered} \tag{1.10}$$