

ВМК МГУ – ШКОЛЕ



АЛГЕБРА

УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС с решениями и указаниями

Учебно-методическое пособие

Под редакцией
М. В. Федотова

6-е издание, электронное



Москва
Лаборатория знаний
2021

УДК 512
ББК 22.141я729+22.141я721.6
А45

Авторский коллектив:
Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, В. В. Сазонов,
Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

Первое издание данного пособия вышло в издательстве Московского университета в 2011 г. (ISBN 978-2-211-05950-4)

Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями :
А45 учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, В. В. Сазонов [и др.] ; под ред. М. В. Федотова. — 6-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2021. — 549 с. — (ВМК МГУ — школе). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-501-1

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ и задач Единого государственного экзамена. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач.

Рекомендуется абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, при подготовке к сдаче Единого государственного экзамена, а также учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 512
ББК 22.141я729+22.141я721.6

Деривативное издание на основе печатного аналога: Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, В. В. Сазонов [и др.] ; под ред. М. В. Федотова. — 5-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2020. — 544 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе). — ISBN 978-5-00101-238-2.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

© Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов,
В. В. Сазонов, Н. Л. Семендяева,
М. В. Федотов, 2020
© Лаборатория знаний, 2015

ISBN 978-5-93208-501-1

Оглавление

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| От редактора | 6 |
| Предисловие | 7 |
| Часть I. Теория и задачи | 9 |
| 1. Элементы теории чисел | 9 |
| 1.1. Целые числа. Делимость и остатки | 9 |
| 1.2. Уравнения в целых числах | 11 |
| 1.3. Смешанные задачи на целые числа | 14 |
| 1.4. Рациональные и иррациональные числа | 17 |
| 1.5. Сравнение чисел | 19 |
| 2. Тригонометрические неравенства, обратные тригонометрические функции | 23 |
| 2.1. Основные свойства арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями | 23 |
| 2.2. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями | 27 |
| 2.3. Отбор решений в тригонометрических уравнениях. Тригонометрические неравенства | 30 |
| 2.4. Смешанные задачи | 34 |
| 3. Полезные преобразования и замены переменных | 35 |
| 3.1. Использование формул сокращённого умножения, выделение полного квадрата | 35 |
| 3.2. Замены переменных в рациональных уравнениях, неравенствах и системах | 39 |
| 3.3. Замены переменных в иррациональных уравнениях, неравенствах и системах | 43 |
| 3.4. Замены переменных в показательных и логарифмических уравнениях, неравенствах и системах | 46 |
| 3.5. Замены в тригонометрических уравнениях и тригонометрические замены | 50 |
| 4. Нестандартные текстовые задачи | 54 |
| 4.1. Недоопределённые задачи | 54 |
| 4.2. Неравенства в текстовых задачах | 57 |
| 4.3. Оптимальный выбор, наибольшие и наименьшие значения | 60 |
| 5. Использование свойств квадратного трёхчлена в задачах с параметрами | 63 |
| 5.1. Исследование свойств квадратичной функции в зависимости от значений параметра. Теорема Виета | 63 |
| 5.2. Теоремы о расположении корней квадратного трёхчлена на числовой оси | 67 |
| 5.3. Смешанные задачи | 73 |
| 6. Использование различных свойств функций и применение графических иллюстраций | 75 |
| 6.1. Область определения функции, монотонность, периодичность, чётность и нечётность | 75 |

| | | |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.2. | Множество значений функции, промежутки знакопостоянства и монотонности | 78 |
| 6.3. | Функциональные уравнения и неравенства | 83 |
| 6.4. | Использование графических иллюстраций | 89 |
| 7. | Метод оценок | 95 |
| 7.1. | Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства | 95 |
| 7.2. | Тригонометрические уравнения и неравенства | 98 |
| 7.3. | Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными функциями | 104 |
| 8. | Задачи на доказательство | 106 |
| 8.1. | Тригонометрические задачи на доказательство | 106 |
| 8.2. | Метод математической индукции | 109 |
| 8.3. | Доказательство неравенств и тождеств | 111 |
| 9. | Использование особенностей условия задачи | 114 |
| 9.1. | Оптимизация процесса решения, введение функций, искусственное введение параметров, смена ролей параметра и переменной | 114 |
| 9.2. | Чётность и симметричность по нескольким переменным, исследование единственности решения, необходимые и достаточные условия | 118 |
| 9.3. | Редукция задачи и переформулирование условия | 123 |
| 9.4. | Смешанные задачи | 127 |

Часть II. Указания и решения **131**

| | | |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. | Элементы теории чисел | 131 |
| 1.1. | Целые числа. Делимость и остатки | 131 |
| 1.2. | Уравнения в целых числах | 138 |
| 1.3. | Смешанные задачи на целые числа | 146 |
| 1.4. | Рациональные и иррациональные числа | 154 |
| 1.5. | Сравнение чисел | 159 |
| 2. | Тригонометрические неравенства, обратные тригонометрические функции | 169 |
| 2.1. | Основные свойства арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями | 169 |
| 2.2. | Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями | 180 |
| 2.3. | Отбор решений в тригонометрических уравнениях. Тригонометрические неравенства | 191 |
| 2.4. | Смешанные задачи | 202 |
| 3. | Полезные преобразования и замены переменных | 218 |
| 3.1. | Использование формул сокращённого умножения, выделение полного квадрата | 218 |
| 3.2. | Замены переменных в рациональных уравнениях, неравенствах и системах | 236 |
| 3.3. | Замены переменных в иррациональных уравнениях, неравенствах и системах | 245 |

| | | |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.4. | Замены переменных в показательных и логарифмических уравнениях, неравенствах и системах | 259 |
| 3.5. | Замены в тригонометрических уравнениях и тригонометрические замены | 276 |
| 4. | Нестандартные текстовые задачи | 284 |
| 4.1. | Недоопределённые задачи | 284 |
| 4.2. | Неравенства в текстовых задачах | 293 |
| 4.3. | Оптимальный выбор, наибольшие и наименьшие значения | 300 |
| 5. | Использование свойств квадратного трехчлена в задачах с параметрами | 312 |
| 5.1. | Исследование свойств квадратичной функции в зависимости от значений параметра. Теорема Виета | 312 |
| 5.2. | Теоремы о расположении корней квадратного трехчлена на числовой оси | 322 |
| 5.3. | Смешанные задачи | 338 |
| 6. | Использование различных свойств функций и графических иллюстраций | 354 |
| 6.1. | Область определения функции, монотонность, периодичность, чётность и нечётность | 354 |
| 6.2. | Множество значений функции, промежутки знакопостоянства и монотонности | 360 |
| 6.3. | Функциональные уравнения и неравенства | 376 |
| 6.4. | Использование графических иллюстраций | 392 |
| 7. | Метод оценок | 414 |
| 7.1. | Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства | 414 |
| 7.2. | Тригонометрические уравнения и неравенства | 422 |
| 7.3. | Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными функциями | 442 |
| 8. | Задачи на доказательство | 458 |
| 8.1. | Тригонометрические задачи на доказательство | 458 |
| 8.2. | Метод математической индукции | 468 |
| 8.3. | Доказательство неравенств и тождеств | 477 |
| 9. | Использование особенностей условия задачи | 491 |
| 9.1. | Оптимизация процесса решения, введение функций, искусственное введение параметров, смена ролей параметра и переменной | 491 |
| 9.2. | Чётность и симметричность по нескольким переменным, исследование единственности решения, необходимые и достаточные условия | 501 |
| 9.3. | Редукция задачи и переформулирование условия | 512 |
| 9.4. | Смешанные задачи | 520 |

Варианты ДВИ МГУ последних лет **528**

Ответы **534**

Список литературы **544**