

ВМК МГУ – ШКОЛЕ



# АЛГЕБРА

## УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС

с решениями и указаниями

Учебно-методическое пособие

Под редакцией  
М. В. Федотова

*6-е издание, электронное*



Москва  
Лаборатория знаний  
2021

УДК 512  
ББК 22.141я729+22.141я721.6  
А45

Авторский коллектив:  
Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, В. В. Сазонов,  
Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

Первое издание данного пособия вышло в издательстве Московского университета в 2011 г. (ISBN 978-2-211-05950-4)

**Алгебра.** Углубленный курс с решениями и указаниями :  
А45 учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, В. В. Сазонов [и др.] ; под ред. М. В. Федотова. — 6-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2021. — 549 с. — (ВМК МГУ — школе). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-501-1

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ и задач Единого государственного экзамена. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач.

Рекомендуется абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, при подготовке к сдаче Единого государственного экзамена, а также учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 512  
ББК 22.141я729+22.141я721.6

**Деривативное издание на основе печатного аналога:** Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, В. В. Сазонов [и др.] ; под ред. М. В. Федотова. — 5-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2020. — 544 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе). — ISBN 978-5-00101-238-2.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

© Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов,  
В. В. Сазонов, Н. Л. Семендяева,  
М. В. Федотов, 2020  
© Лаборатория знаний, 2015

ISBN 978-5-93208-501-1

# Оглавление

От редактора . . . . .	6
Предисловие . . . . .	7
<b>Часть I. Теория и задачи</b>	<b>9</b>
1. Элементы теории чисел . . . . .	9
1.1. Целые числа. Делимость и остатки . . . . .	9
1.2. Уравнения в целых числах . . . . .	11
1.3. Смешанные задачи на целые числа . . . . .	14
1.4. Рациональные и иррациональные числа . . . . .	17
1.5. Сравнение чисел . . . . .	19
2. Тригонометрические неравенства, обратные тригонометрические функции . . . . .	23
2.1. Основные свойства арксинуса, арккосинуса, арктангенса и аркотангенса. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями . . . . .	23
2.2. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями . . . . .	27
2.3. Отбор решений в тригонометрических уравнениях. Тригонометрические неравенства . . . . .	30
2.4. Смешанные задачи . . . . .	34
3. Полезные преобразования и замены переменных . . . . .	35
3.1. Использование формул сокращённого умножения, выделение полного квадрата . . . . .	35
3.2. Замены переменных в рациональных уравнениях, неравенствах и системах . . . . .	39
3.3. Замены переменных в иррациональных уравнениях, неравенствах и системах . . . . .	43
3.4. Замены переменных в показательных и логарифмических уравнениях, неравенствах и системах . . . . .	46
3.5. Замены в тригонометрических уравнениях и тригонометрические замены . . . . .	50
4. Нестандартные текстовые задачи . . . . .	54
4.1. Недоопределённые задачи . . . . .	54
4.2. Неравенства в текстовых задачах . . . . .	57
4.3. Оптимальный выбор, наибольшие и наименьшие значения . . . . .	60
5. Использование свойств квадратного трёхчлена в задачах с параметрами . . . . .	63
5.1. Исследование свойств квадратичной функции в зависимости от значений параметра. Теорема Виета . . . . .	63
5.2. Теоремы о расположении корней квадратного трёхчлена на числовой оси . . . . .	67
5.3. Смешанные задачи . . . . .	73
6. Использование различных свойств функций и применение графических иллюстраций . . . . .	75
6.1. Область определения функции, монотонность, периодичность, чётность и нечётность . . . . .	75

6.2.	Множество значений функции, промежутки знакопостоянства и монотонности . . . . .	78
6.3.	Функциональные уравнения и неравенства . . . . .	83
6.4.	Использование графических иллюстраций . . . . .	89
7.	Метод оценок . . . . .	95
7.1.	Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства . . . . .	95
7.2.	Тригонометрические уравнения и неравенства . . . . .	98
7.3.	Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными функциями . . . . .	104
8.	Задачи на доказательство . . . . .	106
8.1.	Тригонометрические задачи на доказательство . . . . .	106
8.2.	Метод математической индукции . . . . .	109
8.3.	Доказательство неравенств и тождеств . . . . .	111
9.	Использование особенностей условия задачи . . . . .	114
9.1.	Оптимизация процесса решения, введение функций, искусственное введение параметров, смена ролей параметра и переменной . . . . .	114
9.2.	Чётность и симметричность по нескольким переменным, исследование единственности решения, необходимые и достаточные условия . . . . .	118
9.3.	Редукция задачи и переформулирование условия . . . . .	123
9.4.	Смешанные задачи . . . . .	127

## Часть II. Указания и решения 131

1.	Элементы теории чисел . . . . .	131
1.1.	Целые числа. Делимость и остатки . . . . .	131
1.2.	Уравнения в целых числах . . . . .	138
1.3.	Смешанные задачи на целые числа . . . . .	146
1.4.	Рациональные и иррациональные числа . . . . .	154
1.5.	Сравнение чисел . . . . .	159
2.	Тригонометрические неравенства, обратные тригонометрические функции . . . . .	169
2.1.	Основные свойства арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями . . . . .	169
2.2.	Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями . . . . .	180
2.3.	Отбор решений в тригонометрических уравнениях. Тригонометрические неравенства . . . . .	191
2.4.	Смешанные задачи . . . . .	202
3.	Полезные преобразования и замены переменных . . . . .	218
3.1.	Использование формул сокращённого умножения, выделение полного квадрата . . . . .	218
3.2.	Замены переменных в рациональных уравнениях, неравенствах и системах . . . . .	236
3.3.	Замены переменных в иррациональных уравнениях, неравенствах и системах . . . . .	245

3.4.	Замены переменных в показательных и логарифмических уравнениях, неравенствах и системах . . . . .	259
3.5.	Замены в тригонометрических уравнениях и тригонометрические замены . . . . .	276
4.	Нестандартные текстовые задачи . . . . .	284
4.1.	Недоопределённые задачи . . . . .	284
4.2.	Неравенства в текстовых задачах . . . . .	293
4.3.	Оптимальный выбор, наибольшие и наименьшие значения . .	300
5.	Использование свойств квадратного трехчлена в задачах с параметрами . . . . .	312
5.1.	Исследование свойств квадратичной функции в зависимости от значений параметра. Теорема Виета . . . . .	312
5.2.	Теоремы о расположении корней квадратного трехчлена на числовой оси . . . . .	322
5.3.	Смешанные задачи . . . . .	338
6.	Использование различных свойств функций и графических иллюстраций . . . . .	354
6.1.	Область определения функции, монотонность, периодичность, чётность и нечётность . . . . .	354
6.2.	Множество значений функции, промежутки знакопостоянства и монотонности . . . . .	360
6.3.	Функциональные уравнения и неравенства . . . . .	376
6.4.	Использование графических иллюстраций . . . . .	392
7.	Метод оценок . . . . .	414
7.1.	Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства . .	414
7.2.	Тригонометрические уравнения и неравенства . . . . .	422
7.3.	Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными функциями . . . . .	442
8.	Задачи на доказательство . . . . .	458
8.1.	Тригонометрические задачи на доказательство . . . . .	458
8.2.	Метод математической индукции . . . . .	468
8.3.	Доказательство неравенств и тождеств . . . . .	477
9.	Использование особенностей условия задачи . . . . .	491
9.1.	Оптимизация процесса решения, введение функций, искусственное введение параметров, смена ролей параметра и переменной . . . . .	491
9.2.	Чётность и симметричность по нескольким переменным, исследование единственности решения, необходимые и достаточные условия . . . . .	501
9.3.	Редукция задачи и переформулирование условия . . . . .	512
9.4.	Смешанные задачи . . . . .	520

**Варианты ДВИ МГУ последних лет** **528**

**Ответы** **534**

**Список литературы** **544**