Министерство образования и науки Российской Федерации
Ивановский государственный химико-технологический университет

Системы случайных величин

Методические указания для самостоятельной работы студентов

Составитель В.А. Бобкова

Иваново 2010

Составитель В.А. Бобкова

УДК 519.2

Системы случайных величин: метод. указания для самостоятельн. работы ст-тов / Сост. В. А. Бобкова; Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2010-28 с.

Методические указания посвящены одному из разделов курса «Теория вероятностей и математическая статистика», а именно: системам случайных величин. Дано понятие системы случайных величин, описаны способы задания систем дискретных и непрерывных случайных величин. Рассмотрены понятия зависимости и независимости случайных величин, условные законы распределения, числовые характеристики зависимости. Отдельно рассмотрены системы нормально распределенных случайных величин. Приведены графические иллюстрации и примеры решения задач.

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки.

Библиогр.: 4 назв.

Рецензент доктор технических наук, профессор А. Н. Лабутин
(Ивановский государственный химико-технологический университет)

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

1. Основные сведения о системах случайных величин и о способах их задания

1.1. Понятие о системе случайных величин

В практических применениях теории вероятностей приходится иметь дело с задачами, в которых результат опыта описывается не одной случайной величиной, а двумя или более случайными величинами, образующими систему или случайный вектор.

Например, успеваемость наудачу взятого студента характеризуется несколькими оценками, полученными им в ходе экзаменационной сессии; на урожайность данной сельскохозяйственной культуры влияют погодные условия, применяемые удобрения, характер почвы, качество посевного материала и так далее.

Случайным вектором (n-мерной случайной величиной, системой n случайных величин) называют упорядоченный набор из n случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Одномерные случайные величины $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, … , $\boldsymbol{X}_n$ называются ***компонентами*** или ***составляющими*** n-мерной случайной величины $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$. Их можно рассматривать как координаты случайной точки или случайного вектора $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ в пространстве n измерений.

Системы случайных величин могут быть ***дискретными, непрерывными*** и ***смешанными*** в зависимости от типа случайных величин, образующих систему. В первом случае компоненты этих систем являются дискретными случайными величинами, во втором – непрерывными случайными величинами, в третьем – случайными величинами разных типов.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай – систему, состоящую из двух случайных величин (двумерную случайную величину).

Пример: станок-автомат штампует стальные плитки. Контролируемыми размерами являются длина X и ширина Y. Имеем двумерную случайную величину (X,Y).

Геометрически двумерную случайную величину (X,Y) можно истолковать либо как случайную точку M(X,Y) на плоскости (то есть как точку со случайными координатами), либо как случайный вектор **OM** (рис. 1 и рис. 2).

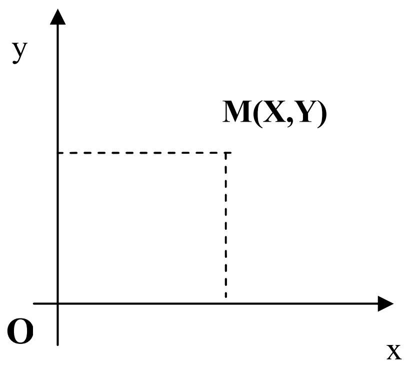


Рис.1.

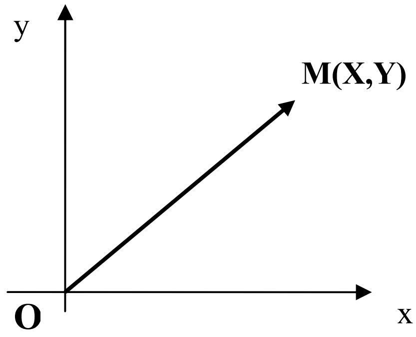


Рис. 2

1.2.Функция распределения вероятностей двумерной случайной величины и её свойства

Универсальной формой задания двумерной случайной величины является функция распределения (или «интегральная функция»).

Функцией распределения двумерной случайной величины (X,Y) называют вероятность совместного выполнения двух неравенств {X<x} и {Y<y}:

$$F(x,y) = p\{X < x; Y < y\}\,. \qquad (1)$$

Геометрическая интерпретация: если двумерную случайную величину (X,Y) рассматривать как случайную точку в прямоугольной декартовой системе координат, то функция распределения F(x,y) есть вероятность попадания случайной точки (X,Y) в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x,y), лежащий левее и ниже её (рис.3):

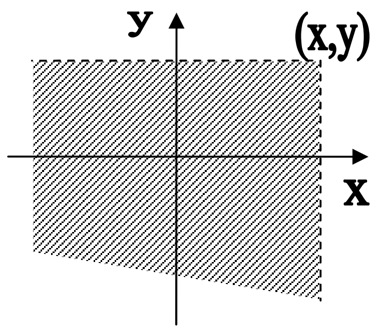


Рис. 3. Геометрическая интерпретация функции распределения двумерной случайной величины

В аналогичной интерпретации функция распределения первой компоненты X случайного вектора – обозначим её $F_1(x)$ – представляет собой вероятность попадания случайной точки в полуплоскость, ограниченную справа абсциссой x (рис. 4); функция распределения величины Y – $F_2(y)$ – вероятность попадания в полуплоскость, ограниченную сверху ординатой y (рис. 5):

ђqqduaY bЖ dєqЖbYзe d єaqcєa Jqqd Yquè

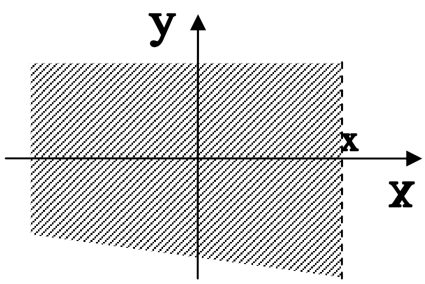


Рис. 4. Геометрическая интерпретация функции распределения первой компоненты $F_1(x)$ двумерной случайной величины (X,Y).

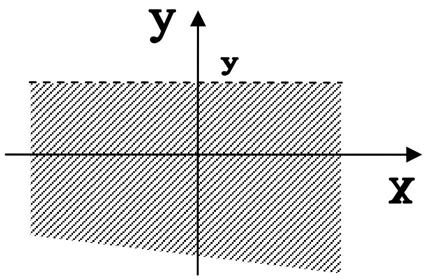


Рис. 5. Геометрическая интерпретация функции распределения второй компоненты $F_2(y)$ двумерной случайной величины (X,Y).

Пример 1. Найти вероятность того, что в результате испытания составляющая X двумерной случайной величины (X,Y) примет значение X<2, при этом составляющая Y примет значение Y<3, если известна функция распределения системы

$$F(x,y) = (\frac{1}{\pi} arctg\frac{x}{2} + \frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{\pi} arctg\frac{y}{3} + \frac{1}{2})$$

Решение: $F(x,y) = P\{X < x; Y < y\}$

Тогда

$$p\{X < 2; Y < 3\} = F(2,3) = (\frac{1}{2} arctg\frac{2}{2} + \frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{\pi} arctg\frac{3}{3} + \frac{1}{2}) =$$

$$= (\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$

Ответ: 0,5625.

Свойства функции распределения двумерной случайной величины

1) $$0 \le F(x,y) \le 1, \qquad (2)$$

так как это вероятность.

2) F(x,y) есть неубывающая функция своих аргументов, то есть

$$F(x_2, y) \ge F(x_1, y) \text{ при } x_2 > x_1, \qquad (3)$$

$$F(x, y_2) \ge F(x, y_1) \text{ при } y_2 > y_1. \qquad (4)$$

Доказательство. При увеличении какого-либо из аргументов (x,y) заштрихованная на рис.1 область увеличивается, значит, вероятность попадания в неё случайноё точки (X,Y) не может уменьшаться.

3) Если хотя бы один из аргументов обращается в -∞, то функция распределения F(x,y) равна нулю:

$$F(x,-\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty,-\infty) = 0. \qquad (5)$$

Доказательство. События $\{X < -\infty\}$, $\{Y < -\infty\}$ и их произведение невозможны, следовательно, вероятности этих событий равны нулю.

4) Если оба аргумента равны +∞, то функция распределения F(x,y) равна единице:

$$F(+\infty,+\infty) = 1. \qquad (6)$$

Доказательство. Событие $\{X < +\infty\} \cdot \{Y < +\infty\}$ достоверно, следовательно, его вероятность равна единице.

5) При одном из аргументов, равном +∞, функция распределения двумерного вектора превращается в функцию распределения компоненты, соответствующей другому аргументу:

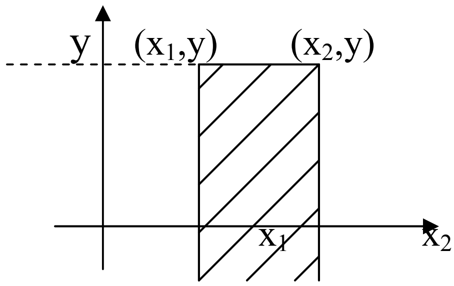
$$F(x,+\infty) = F_1(x); \quad F(+\infty, y) = F_2(y). \qquad (7)$$

Доказательство: Так как событие $Y<+\infty$ достоверно, то $F(x, +\infty)$ определяет вероятность события $X<x$, то есть представляет собой функцию распределения составляющей X.

Итак, зная совместное распределение двух случайных величин, можно найти одномерные распределения каждой из этих случайных величин, однако обратное, в общем случае, неверно.

Вероятность попадания случайной точки в полуполосу

Используя функцию распределения системы случайных величин X и Y, найдем вероятность того, что в результате испытания случайная точка попадет в полуполосу $x_1<X<x_2$ и $Y<y$



$$p\{x_1<X<x_2, Y<y\} =$$
$$= p(x<x_2, Y<y) - p\{X<x_1, Y<y\} =$$
$$= F(x_2,y) - F(x_1,y)$$

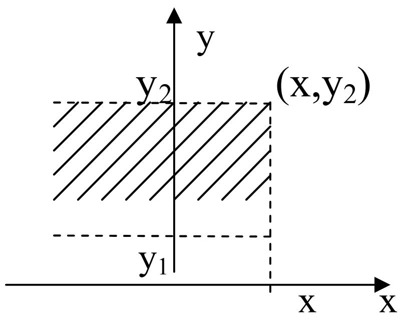
x

Аналогично,

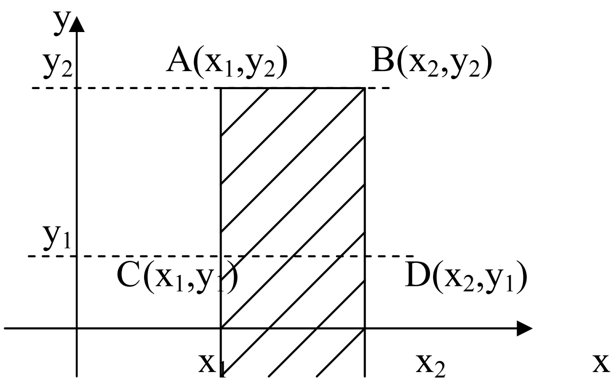
$p\{X<x, y_1<Y<y_2\} = F(x,y_2) - F(x,y_1)$.

Таким образом, вероятность попадания случайной точки в полуполосу равна приращению функции (x,y_1)

распределения по одному из аргументов.



Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник



Рассмотрим прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Пусть уравнения сторон: $X=x_1$; $X=x_2$; $Y=y_1$; $Y=y_1$.

Тогда $p\{x_1<X<x_2, y_1<Y<y_2\} = p\{x_1<X<x_2, Y<y_2\} - p\{x_1<X<x_2, Y<y_1\} =$
$= [F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2)] - [F(x_2,y_1) - F(x_1,y_1)]$.

Итак,

$$p\{x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2\} = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)] \qquad (8)$$

Пример 2. Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\pi/6$; $x=\pi/2$; $y=\pi/4$; $y=\pi/3$, если $F(x,y)=\sin(x)\sin(y)$ $(0\le x<\pi/2;\ 0\le y<\pi/2)$.

Решение:

$$P(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{3}) = [F(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}) - F(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})] - [F(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) - F(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})] =$$

$$= [\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}] - [\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}] =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{4}.$$

Ответ: $\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{4}$.

1.3. Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины

Законом распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины называется совокупность всех возможных значений этой случайной величины, то есть пар чисел (x_i,y_i), и их вероятностей $p(x_i,y_i)$:

$$p_{ij} = p(x_i, y_i) = p\{X = x_i; Y = y_i\}, \ i = \overline{1,n}, \ \ j = \overline{1,m}$$

Здесь n, m – число возможных значений случайных величин X и Y (n и m могут быть конечными или бесконечными).

Обычно закон распределения задают в виде таблицы. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – все возможные значения случайной величины X, $y_1, y_2, \dots, y_m$ – все возможные значения случайной величины Y. Тогда закон распределения может быть представлен в виде следующей таблицы:

Таблица 1

x \ y	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	…	$p(x_1,y_j)$	…	$P(x_1,y_m)$
x_2	$p(x_2,y_1)$	$p(x_2,y_2)$	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…
x_i	$p(x_i,y_1)$	…	…	$p(x_i,y_j)$	…	…
…	…	…	…	…	…	…
x_n	$p(x_n,y_1)$	…	…	…	…	$p(x_n,y_m)$

В клетке на пересечении строки x_i и столбца y_j указана вероятность $p(x_i,y_j)$ того, что двумерная случайная величина (X,Y) примет значение (x_i,y_j).

Так как события $\{X = x_i; Y = y_j\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ образуют полную группу событий, то сумма вероятностей во всех клетках равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \qquad (9)$$

Зная закон распределения двумерной случайной величины, можно найти законы распределения каждой из составляющих. Действительно, так как, например, события $\{X=x_1,Y=y_1\},\{X=x_1,Y=y_2\}, \ldots , \{X=x_1,Y=y_m\}$ несовместны, то вероятность $p(x_1)$ того, что одномерная случайная величина X примет значение x_1, по теореме сложения вероятностей несовместных событий равна

$$p_1 = p\{X = x_1\} = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + \ldots + p(x_1, y_m). \qquad (10)$$

В общем случае имеем:

$$p_i = p\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}. \qquad (11)$$

Аналогично можно записать:

$$p_j = p\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}. \qquad (12)$$

Пример 3. Качество продукции характеризуется двумя случайными величинами: X и Y. Закон распределения случайного вектора (X,Y) представлен в таблице:

Таблица 2

x_i \ y_j	0	0,1	0,2	0,3	p_i
5	0,2	0,1	0,05	0,05	0,4
6	0	0,15	0,15	0,1	0,4
7	0	0	0,1	0,1	0,2
p_j	0,2	0,25	0,3	0,25	$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

Найдём закон распределения координат X и Y случайного вектора. Вероятность события $\{X = x_i\} = p_i$ есть сумма вероятностей, находящихся в i-ой строке. Вероятности p_i находятся в последнем столбце таблицы.

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

Таблица 3

x_i	5	6	7

p_i	0,4	0,4	0,2

Ряд распределения Y находим, вычисляя суммы элементов столбцов таблицы 2. Эти вероятности p_j находятся в последней строке таблицы 2.

Ряд распределения случайной величины Y имеет вид:

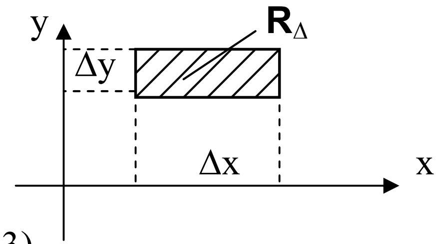
Таблица 4

y_i	0	0,1	0,2	0,3
p_j	0,2	0,25	0,3	0,25

1.4. Плотность распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины и её свойства

Распределение многомерных непрерывных случайных величин обычно характеризуют плотностью распределения.

Плотностью распределения двумерной непрерывной случайной величины называют предел отношения вероятности попадания случайной величины в малый прямоугольник к площади этого прямоугольника, когда оба его размера стремятся к нулю:



$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{p\{(x,y)\in R_\Delta\}}{\Delta x\cdot\Delta y}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

(13)

Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины вычисляется как вторая смешанная частная производная от функции распределения.

Геометрически плотность распределения вероятностей $f(x,y)$ системы двух случайных величин (X,Y) представляет собой некоторую поверхность, называемую ***поверхностью распределения*** (рис. 6):