МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Т.Н. Глушакова, К.П. Лазарев

БИЛИНЕЙНАЯ И КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМЫ

Учебно-методическое пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

СОДЕРЖАНИЕ

$$b(x,y)=\frac{-k(x)-k(y)+k(x+y)}{2}.$$

Из (1.1) следует, что $b(x,x)=x^T Bx$, где B – симметрическая матрица, $x\in R^n$.

Пусть в R^n базис выбран из собственных векторов матрицы B, тогда

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix} \text{ и } k(x)=(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=\lambda_1 x_1^2+\dots+\lambda_n x_n^2. \qquad (2.1)$$

Запись квадратичной формы в виде (2.1) называется **каноническим видом** квадратичной формы.

Квадратичную форму можно представить в нормальном виде:

$$k(x)=x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_n^2.$$

Опишем, как строится матрица квадратичной формы.

Пусть квадратичная форма имеет вид

$$k(x)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i x_j .$$

Так как $x_i x_j = x_j x_i$, то $a_{ij} == a_{ji}$, поэтому матрица квадратичной формы – симметрическая. Элементы a_{ii} стоят на главной диагонали, коэффициенты при смешанном произведении $x_i x_j$ делятся пополам и записываются на ij и ji местах.

Пример 2.1. Построить матрицу квадратичной формы

$$k(x)=5x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+12x_1x_3+8x_2x_3.$$

С учетом вышесказанного, матрица квадратичной формы имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 6\\ 2 & 3 & 4\\ 6 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Определение 2.2. **Сигнатура** – разность между числом положительных и отрицательных коэффициентов квадратичной формы в каноническом виде.

Определение 2.3. Две квадратичные формы называются **эквивалентными**, если совпадают ранги этих форм и сигнатура.

Определение 2.4. **Рангом квадратичной формы** называется ранг ее симметрической матрицы.

Теорема 2.1. Две квадратичные формы от n неизвестных с действительными коэффициентами тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденными действительными линейными преобразованиями, когда эти формы эквивалентны.

Утверждение 2.1. Если квадратичные формы эквивалентны, то нормальные виды квадратичных форм совпадают.

2.2. Способы приведения квадратичной формы к каноническому виду

Теорема 2.2. Для любой квадратичной формы существует невырожденное линейное преобразование, которое приводит ее к каноническому виду.

Существуют три способа приведения квадратичной формы к каноническому виду:

1) метод Лагранжа (метод полных квадратов);
2) метод Якоби;
3) метод ортогональных преобразований.

Рассмотрим каждый из указанных способов.

2.2.1. Метод Лагранжа (метод полных квадратов)

Метод Лагранжа состоит в следующем.

1) Сначала находим слагаемое, содержащее квадрат. Пусть это слагаемое имеет вид $\alpha_{ii}x_i^2$. Затем выписываем все члены, содержащие x_i, и дополняем их до полного квадрата, который обозначим через y_1^2. Приводим подобные слагаемые. Среди оставшихся слагаемых с x_j $(j \neq i)$ находим слагаемое, содержащее квадрат, и повторяем предыдущие рассуждения.

2) Если слагаемых с квадратами нет, а смешанные произведения есть, например, $\alpha_{jk}x_j x_k$, то делаем замену

$$x_j = y_p + y_q, \quad x_k = y_p - y_q$$

и повторяем рассуждения первого пункта.

Пример 2.2. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$k(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 + 4x_3^2 - 4x_2x_4 - 8x_3x_4 - x_4^2$$

методом Лагранжа.

1) Выпишем все члены, содержащие x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 = x_1^2 + 2x_1 \cdot 3x_2 + 2x_1(-2x_3) = (x_1 + 3x_2 - 2x_3)^2 -$$
$$- 2 \cdot 3x_2(-2x_3) - 9x_2^2 - 4x_3^2 = y_1^2 + 12x_2x_3 - 9x_2^2 - 4x_3^2.$$

2) Подставим полученное выражение вместо слагаемых с x_1 и приведем подобные слагаемые, получим:

$$k(x)=y_1^2+12x_2x_3-9x_2^2-4x_3^2+5x_2^2+4x_3^2-4x_2x_4-8x_3x_4-x_4^2=$$
$$=y_1^2+12x_2x_3-4x_2^2-4x_2x_4-8x_3x_4-x_4^2.$$

3) Выпишем все члены, содержащие x_2, и дополним их до полного квадрата:

$$-4x_2^2+12x_2x_3-4x_2x_4=-[4x_2^2-12x_2x_3+4x_2x_4]=-[(2x_2)^2+2\cdot(2x_2)\cdot(-3x_3)+$$
$$+2\cdot(2x_2)\cdot x_4]=-[(2x_2-3x_3+x_4)^2-2(-3x_3)x_4-9x_3^2-x_4^2]=$$
$$=-y_2^2-6x_3x_4+9x_3^2+x_4^2.$$

4) Подставим полученное выражение вместо слагаемых с x_2 и приведем подобные слагаемые, получим:

$$k(x)=y_1^2-y_2^2-6x_3x_4+9x_3^2+x_4^2-8x_3x_4-x_4^2=y_1^2-y_2^2-14x_3x_4+9x_3^2.$$

5) Выпишем все члены, содержащие x_3, и дополним их до полного квадрата:

$$9x_3^2-14x_3x_4=(3x_3)^2-2\cdot 3x_3\cdot\frac{7}{3}x_4+\frac{49}{9}x_4^2-\frac{49}{9}x_4^2=(3x_3-\frac{7}{3}x_4)^2-\frac{49}{9}x_4^2.$$

6) Подставим полученное выражение вместо слагаемых с x_3 и приведем подобные слагаемые, получим:

$$k(x)=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2,$$

где

$$y_1=x_1+3x_2-2x_3,\ y_2=2x_2-3x_3+x_4,\ y_3=3x_3-\frac{7}{3}x_4,\ y=\frac{7}{3}x_4.$$

Замечания.

1) Замена переменных должна быть невырожденной (то есть обратимой).
2) Число новых и старых переменных должно совпадать.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму $k(x)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_1x_4$ методом Лагранжа.

Решение.

Так как среди слагаемых ни одного квадрата нет, сделаем следующую замену:

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2 \\ x_2=y_1+y_2 \\ x_3=y_3 \\ x_4=y_4 \end{cases}.$$

Получим:

$$k(y)=(y_1-y_2)(y_1+y_2)+(y_1+y_2)y_3+y_3y_4+(y_1-y_2)y_4=$$
$$=y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_1y_4+y_2y_3-y_2y_4+y_3y_4.$$

Дальнейшие преобразования проводятся аналогично предыдущему случаю.

Пример 2.3. Для следующих квадратичных форм найти невырожденное линейное преобразование, переводящее форму f в форму g:

$$f(x) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3,$$
$$g(y) = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

Решение.

Приведем обе формы к нормальному виду методом Лагранжа.

Рассмотрим сначала форму $f(x)$. Выпишем все слагаемые, содержащие x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$2x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 = (\sqrt{2}x_1)^2 + 2\cdot(\sqrt{2}x_1)\cdot(2\sqrt{2}x_2) + 2(\sqrt{2}x_1)(-\sqrt{2}x_3) =$$
$$= (\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3)^2 - 8x_2^2 - 2x_3^2 + 2\cdot 2\sqrt{2}x_2\cdot\sqrt{2}x_3 = \eta_1^2 - 8x_2^2 - 2x_3^3 + 8x_2x_3.$$

Подставим полученное выражение вместо слагаемых с x_1 и приведем подобные слагаемые, получим:

$$f = \eta_1^2 - 8x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_2x_3 + 9x_2^2 + 3x_3^2 - 10x_2x_3 = \eta_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 =$$
$$= \eta_1^2 + (x_2 - x_3)^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2.$$

Здесь $\eta_1 = \sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3$, $\eta_2 = x_2 - x_3$, $\eta_3 = x_3$.

Рассмотрим теперь форму $g(y)$. Выпишем все слагаемые, содержащие y_1, и дополним их до полного квадрата:

$$2y_1^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 = (\sqrt{2}x_1)^2 + 2\cdot(\sqrt{2}y_1)\cdot(-\sqrt{2}y_2) + 2(\sqrt{2}y_1)(-\sqrt{2}y_3) =$$
$$= (\sqrt{2}y_1 - \sqrt{2}y_2 - \sqrt{2}y_3)^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 - 2\cdot\sqrt{2}y_2\cdot\sqrt{2}y_3 = \nu_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^3 - 4y_2y_3.$$

Подставим полученное выражение вместо слагаемых с y_1 и приведем подобные слагаемые, получим:

$$g = \nu_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 - 4y_2y_3 + 3y_2^2 + 6y_3^2 + 8y_2y_3 = \nu_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_2y_3 =$$
$$= \nu_1^2 + (y_2 + 2y_3)^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2.$$

Здесь $\nu_1 = \sqrt{2}y_1 - \sqrt{2}y_2 - \sqrt{2}y_3$, $\nu_2 = y_2 + 2y_3$, $\nu_3 = y_3$.

Так как нормальные виды квадратичных форм совпадают, приравняем η_i к ν_i $(i = 1, 2, 3)$. Получим:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 = \sqrt{2}y_1 - \sqrt{2}y_2 - \sqrt{2}y_3 \\ x_2 - x_3 = y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}.$$

Выразим x_i через y_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 3y_2 - 6y_3 \\ x_2 = y_2 + 3y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}.$$

Пример 2.4. Для следующих квадратичных форм найти невырожденное линейное преобразование, переводящее форму f в форму g:

$$f(x) = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3,$$

$$g(y) = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2.$$

Решение.

Приведем обе формы к нормальному виду методом Лагранжа.

Рассмотрим сначала форму $f(x)$. Выпишем все слагаемые, содержащие x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$3x_1^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 = (\sqrt{3}x_1)^2 + 2\cdot(\sqrt{3}x_1)\cdot(-2\sqrt{3}x_2) + 2(\sqrt{3}x_1)(-3\sqrt{3}x_3) =$$
$$= (\sqrt{3}x_1 - 2\sqrt{3}x_2 - 3\sqrt{3}x_3)^2 - 12x_2^2 - 27x_3^2 - 36x_2x_3 = \eta_1^2 - 12x_2^2 - 27x_3^2 - 36x_2x_3.$$

Подставим полученное выражение вместо слагаемых с x_1 и приведем подобные слагаемые, получим:

$$f = \eta_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3 == \eta_1^2 - (\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3)^2 = \eta_1^2 - \eta_2^2.$$

Здесь $\eta_1 = \sqrt{3}x_1 - 2\sqrt{3}x_2 - 3\sqrt{3}x_3$, $\eta_2 = \sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3$, $\eta_3 = x_3$.

Рассмотрим теперь форму $g(y)$. Выпишем все слагаемые, содержащие y_2, и дополним их до полного квадрата:

$$6y_2^2 + 12y_1y_2 = (\sqrt{6}y_2)^2 + 2\cdot(\sqrt{6}y_2)\cdot(\sqrt{6}y_1) + 6y_1^2 - 6y_1^2 =$$
$$= (\sqrt{6}y_2 + \sqrt{6}y_1)^2 - 6y_1^2 = \nu_1^2 - 6y_1^2.$$

Подставим полученное выражение вместо слагаемых с y_2 и приведем подобные слагаемые, получим:

$$g = \nu_1^2 - 6y_1^2 + 5y_1^2 == \nu_1^2 - y_1^2 = \nu_1^2 - \nu_2^2.$$

Здесь $\nu_1 = \sqrt{6}y_1 + \sqrt{6}y_2$, $\nu_2 = y_1$, $\nu_3 = y_3$.

Так как нормальные виды квадратичных форм совпадают, приравняем η_i к ν_i $(i = 1, 2, 3)$. Получим:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x_1 - 2\sqrt{3}x_2 - 3\sqrt{3}x_3 = \sqrt{6}y_1 + \sqrt{6}y_2 \\ \sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 = y_1 \\ x_3 = y_3 \end{cases}.$$

Выразим x_i через y_i $(i = 1, 2, 3)$: