МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
И ОБРАЗОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРОИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра сопротивления материалов

Утверждаю.
Проректор по УР
А.Патрушев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БРУСЬЕВ

в программных продуктах SCAD, MSC.Patran-Nastran-2005 и MathCAD

Методические указания

Челябинск 2007

Методические указания предназначены для студентов 2-го курса всех специальностей дневной формы обучения и студентов-заочников 3-го курса, изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Прикладная механика» и «Техническая механика».

Составитель

Жилкин В.А. - докт.техн.наук, профессор (ЧГАУ)

Рецензенты
Сапожников СБ. - докт. техн. наук, проф. (ЮУрГУ)
Кромский Е.И. - канд. техн. наук, доцент (Уральский филиал МАДИ)

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЧГАУ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БРУСЬЕВ

МОМЕНТЫ СЕЧЕНИЯ

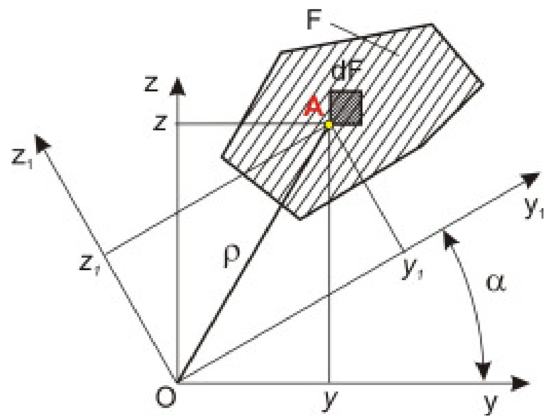

Рис.1

Под моментами сечения, приведенного на *рис.1*, понимаются определенные интегралы вида:

$$\left.\begin{aligned} S_y &= \int_F z dF; \\ S_z &= \int_F y dF; \end{aligned}\right\}$$ - статические моменты сечения относительно осей y и z;

$$\left.\begin{aligned} J_y &= \int_F z^2 dF; \\ J_z &= \int_F y^2 dF; \end{aligned}\right\}$$ - осевые моменты инерции сечения относительно осей y и z;

$J_{yz} = \int_F yz dF$ - центробежный момент инерции сечения относительно осей y и z;

$J_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_F \left(y^2 + z^2\right) dF = \int_F z^2 dF + \int_F y^2 dF = J_y + J_z$ - полярный момент инерции сечения относительно начала координат. Он равен сумме осевых моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей, проходящих через начало координат.

Моменты инерции J_y, J_z, J_ρ всегда положительны и никогда не равняются нулю. S_y, S_z, J_{yz} могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Единицами измерения статического момента и момента инерции сечения являются $м^3$, $м^4$.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СЕЧЕНИЯ И СВОЙСТВО СТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Центром тяжести сечения называется точка (*рис.2*), координаты которой определяются по формулам:

$$y_{ц.т} = \frac{S_z}{F}; \quad z_{ц.т} = \frac{S_y}{F}. \tag{1}$$

Понятию «центр тяжести» не следует придавать физического смысла.

Если положение центра тяжести известно, то из (1) следует

$$S_z = y_{ц.т} \cdot F\ ;\quad S_y = z_{ц.т} \cdot F\ . \tag{2}$$

Статический момент сечения относительно оси равняется его площади, умноженной на расстояние от центра тяжести сечения до этой оси.

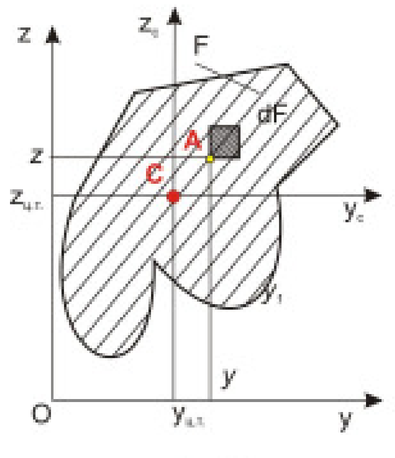

Рис.2

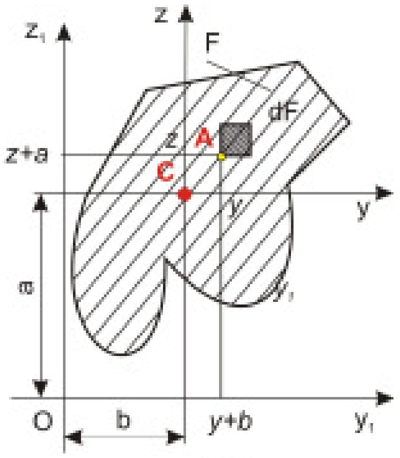

Рис.3

Оси, проходящие через центр тяжести, называются *центральными*.

Статические моменты сечения относительно центральных осей равны нулю, т.к. для этих осей $y_c = 0 : z_c = 0$.

ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Пусть оси y и z будут центральными (*рис.3*). В соответствии с определением осевые моменты инерции сечения относительно параллельных осей y_1 и z_1 имеют вид

$$\left.\begin{aligned} J_{y_1} &= \int_F (z+a)^2\, dF\ ; \\ J_{z_1} &= \int_F (y+b)^2\, dF \end{aligned}\right\}$$

Раскрыв скобки и преобразовав выражения, получим

$$\left.\begin{aligned} J_{y_1} &= J_y + a^2 F\ ; \\ J_{z_1} &= J_z + b^2 F\ . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Осевой момент инерции сечения относительно произвольной оси, параллельной центральной, равен сумме момента инерции относительно центральной оси и произведения квадрата расстояния между осями на площадь сечения.

По определению, центробежный момент инерции сечения относительно перпендикулярных осей y_1 и z_1

$$J_{y_1z_1}=\int\limits_F (y+a)(z+b)dF=J_{yz}+abF\ . \qquad (4)$$

Центробежный момент инерции сечения относительно перпендикулярных осей равен центробежному моменту инерции относительно центральных осей, параллельных им, сложенному с произведением расстояний между осями на площадь сечения.

ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ

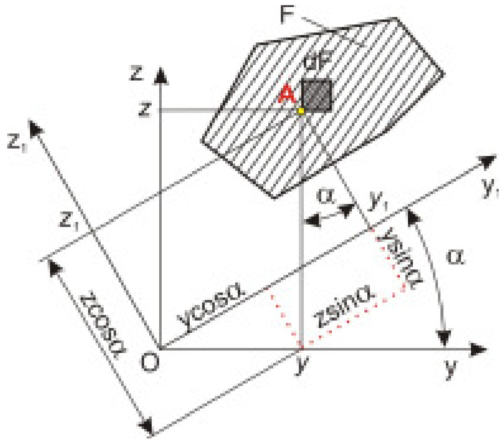

Рис.4

Пусть известны координаты y и z левого нижнего угла площадки dF (*рис.4*). Определим координаты y_1 и z_1 этой точки в системе координат y_1Oz_1, повернутой относительно системы координат yOz на угол α:

$$y_1=y\cos\alpha+z\sin\alpha;\quad z_1=-y\sin\alpha+z\cos\alpha\,.$$

По определению:

$$\left.\begin{aligned} J_{y_1}&=\int\limits_F z_1^{\,2}dF=J_y\cos^2\alpha+J_z\sin^2\alpha-J_{yz}\sin 2\alpha;\\ J_{z_1}&=\int\limits_F y_1^{\,2}dF=J_y\sin^2\alpha+J_z\cos^2\alpha+J_{yz}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Если сложить выражения (5), получим

$$J_{y_1}+J_{z_1}=J_y+J_z=const\ .$$

Сумма осевых моментов инерции относительно ортогональных осей есть величина постоянная.

$$J_{y_1z_1}=\int\limits_F y_1z_1dF=\frac{J_y-J_z}{2}\sin 2\alpha+J_{yz}\cos 2\alpha\ . \qquad (6)$$

Формулы (5) можно переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned} J_{y_1}&=\frac{J_y+J_z}{2}+\frac{J_y-J_z}{2}\cos 2\alpha-J_{yz}\sin 2\alpha\\ J_{z_1}&=\frac{J_y+J_z}{2}-\frac{J_y-J_z}{2}\cos 2\alpha+J_{yz}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$