

УДК 512.77+517.912+517.958

Интернет-магазин

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №05-01-14031.

## Цыганов А. В.

Интегрируемые системы в методе разделения переменных. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2005. — 384 с.

В книге описана современная инвариантная теория нахождения переменных разделения в уравнении Гамильтона–Якоби, которая позволяет избежать громоздких координатных вычислений и особых аналитических приемов, используемых ранее для различных интегрируемых систем классической механики. Рассмотрено большое количество конкретных примеров, для которых проведено сравнение различных методов построения переменных разделения.

Для студентов и аспирантов физико-математических специальностей университетов, специалистов.

**ISBN 5-93972-459-0**

© А. В. Цыганов, 2005

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005

<http://rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	9
<b>ГЛАВА 1. Интегрируемые системы на пуассоновых многообразиях</b> . . . . .	11
§ 1. Пуассоновы многообразия . . . . .	12
1. Основные определения . . . . .	12
2. Примеры симплектических и пуассоновых многообразий . . . . .	14
3. Лагранжевы подмногообразия . . . . .	17
4. Билагранжевы многообразия . . . . .	19
5. Тензора Киллинга на римановых многообразиях . . . . .	21
§ 2. Бигамильтоновы многообразия . . . . .	27
1. $\omega N$ -многообразия . . . . .	27
2. Координаты Дарбу–Нийенхейса . . . . .	28
3. Примеры $\omega N$ -многообразий . . . . .	30
4. Пуассоновы отображения . . . . .	35
5. Примеры пуассоновых отображений . . . . .	36
§ 3. Интегрируемые гамильтоновы системы . . . . .	40
1. Уравнение Гамильтона–Якоби . . . . .	41
2. Теорема Лиувилля . . . . .	43
3. Представление Лакса . . . . .	45
4. Бигамильтоновы интегрируемые системы . . . . .	48
<b>ГЛАВА 2. Метод разделения переменных для конечномерных интегрируемых систем</b> . . . . .	55
§ 1. Разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби . . . . .	55
1. О разделении переменных . . . . .	55
2. Метод Гамильтона–Якоби . . . . .	58
3. Геометрическое определение . . . . .	61
§ 2. Разделение переменных на римановых многообразиях . . . . .	65
1. Системы натурального вида . . . . .	65
2. Разделение переменных при движении по геодезическим . . . . .	66
3. Разделение переменных для гамильтонианов натурального вида . . . . .	69
4. Теорема Бертрана–Дарбу . . . . .	71
5. Ортогональные системы криволинейных координат в пространстве $\mathbb{R}^n$ . . . . .	73
6. Обобщенная теорема Бертрана–Дарбу . . . . .	75

7. Алгоритм ортогонального разделения переменных . . .	79
§ 3. Разделение переменных на пуассоновых многообразиях . .	82
1. Разделение переменных на $\omega N$ -многообразиях . . . . .	82
2. Метод Склянина . . . . .	93
3. Инвариантные переменные разделения . . . . .	99
§ 4. Примеры построения переменных разделения . . . . .	103
1. Система Неймана . . . . .	103
2. Волчок Горячева–Чаплыгина . . . . .	108
3. Старшие стационарные потоки уравнения KdV . . . . .	110
4. Стационарные потоки уравнения Буссинеска . . . . .	113
5. Разделение переменных в квантовой механике . . . . .	116
<b>ГЛАВА 3. Построение интегрируемых систем в методе</b>	
<b>разделения переменных</b> . . . . .	119
§ 1. Метод Якоби . . . . .	119
1. Введение . . . . .	119
2. Основные факты . . . . .	120
3. Пример: переменные Чаплыгина . . . . .	123
4. Различные реализации идеи Якоби . . . . .	125
§ 2. Системы Штекеля и цепочки Тоды в методе Якоби . . . .	126
1. Однородные обобщенные штекелевские системы . . . .	126
2. Системы типа Штекеля . . . . .	129
3. Цепочки Тоды . . . . .	131
4. Обобщенные цепочки Тоды . . . . .	136
§ 3. Коммутативные пуассоновы подалгебры	
для скобок Склянина . . . . .	146
1. Первые скобки Склянина . . . . .	146
2. Вторые скобки Склянина . . . . .	149
3. Коммутативные подалгебры . . . . .	151
4. Обобщенный волчок Горячева–Чаплыгина . . . . .	156
5. Периодические цепочки Тоды . . . . .	160
6. Интегрируемые системы на алгебре $so(4)$ . . . . .	162
§ 4. Канонические преобразования расширенного фазового	
пространства . . . . .	167
1. Введение . . . . .	167
2. Преобразования, сохраняющие уравнение	
Гамильтона–Якоби . . . . .	169
3. Преобразования Кеплера и Лиувилля . . . . .	172
4. Преобразования Мопертью–Якоби . . . . .	175
5. Примеры . . . . .	176
§ 5. Замены времени для обобщенных цепочек Тоды . . . . .	179
1. Преобразования матриц Лакса . . . . .	179
2. Семейство интегрируемых систем на плоскости с инте-	
гралами 3, 4 и 6 степени . . . . .	182
3. Замена времени для цепочки Тоды $A_n$ типа . . . . .	184

4. Разделение переменных . . . . .	187
5. Преобразование Бэклунда . . . . .	191
<b>ГЛАВА 4. Интегрируемые системы типа Штеккеля . . . . .</b>	<b>194</b>
§ 1. Теорема Штеккеля . . . . .	194
§ 2. Замена времени для систем Штеккеля . . . . .	197
1. Связь различных штеккелевских систем . . . . .	197
2. Обобщенные штеккелевские системы . . . . .	199
3. Примеры . . . . .	201
§ 3. Системы Штеккеля и отображение Абеля . . . . .	206
1. Отображение Абеля . . . . .	207
2. Однородные штеккелевские системы . . . . .	210
3. Примеры . . . . .	211
§ 4. Представление Лакса . . . . .	214
1. Движение по геодезическим . . . . .	215
2. Потенциальное движение . . . . .	219
3. Однородные штеккелевские системы общего вида . . . . .	224
4. Примеры . . . . .	226
§ 5. Замены координат . . . . .	239
1. Точечные преобразования . . . . .	239
2. Квазиточечные преобразования координат . . . . .	241
3. Примеры . . . . .	242
§ 6. Вырожденные штеккелевские системы, обладающие куби- ческим интегралом движения . . . . .	245
1. Вырожденные штеккелевские системы . . . . .	246
2. Системы Драша . . . . .	247
3. Представление Лакса для систем Драша . . . . .	254
<b>ГЛАВА 5. Интегрируемые системы в динамике твердого тела . . . . .</b>	<b>257</b>
§ 1. Уравнения Эйлера–Пуассона и Кирхгофа . . . . .	257
§ 2. Система Клебша . . . . .	259
1. Введение . . . . .	259
2. Матрицы Лакса . . . . .	260
3. Эллиптические координаты . . . . .	262
4. Решение Кёттера . . . . .	264
§ 3. Системы Стеклова . . . . .	269
1. Введение . . . . .	269
2. Разделение переменных для системы Стеклова–Ляпунова . . . . .	271
3. Изоморфизм системы Стеклова–Ляпунова и потенци- ального движения по поверхности сферы . . . . .	273
4. Представление Лакса . . . . .	275
5. Системы Стеклова на $so(4)$ и $e(3)$ . . . . .	278
6. Разделение переменных для системы Стеклова на алге- бре $so(4)$ . . . . .	280

§ 4. Случай Ковалевской и его интегрируемые обобщения . . .	283
1. Волчок Ковалевской на алгебрах $e(3)$ и $so(4)$ . . . . .	283
2. Переменные Ковалевской . . . . .	286
3. Гироскат Ковалевской и система Клебша . . . . .	294
§ 5. Гироскат Ковалевской–Горячева–Чаплыгина . . . . .	297
1. Случай Чаплыгина на алгебрах $e(3)$ и $so(4)$ . . . . .	297
2. Гироскат Ковалевской при $B = \langle x, J \rangle = 0$ . . . . .	301
3. Уравнения движения в форме Лакса . . . . .	303
4. Переменные разделения . . . . .	304
§ 6. Интегрируемые системы на сфере . . . . .	306
1. Метод Якоби и симплектические преобразования . . . .	307
2. Симплектические преобразования алгебры $e(3)$ . . . . .	309
3. Интегрируемые системы на сфере с интегралами 2, 3 и 6 степени . . . . .	311
4. Семейство интегрируемых систем на сфере, обладаю- щих кубическим интегралом движения . . . . .	316
5. Семейство интегрируемых систем на сфере, обладаю- щих интегралом движения четвертой степени . . . . .	322
§ 7. Алгебра $so(p, q)$ и интегрируемые волчки . . . . .	325
1. Взаимодействующие волчки, алгебра $so(p, q)$ . . . . .	327
2. Деформации функции Гамильтона . . . . .	330
3. Матрицы Лакса в неподвижной системе отсчета . . . .	332
4. Примеры . . . . .	334
5. Волчок Ковалевской на алгебре $so(4)$ . . . . .	337
<b>Приложение 1. Внешние автоморфизмы представлений алгебры <math>sl(2)</math> . . . . .</b>	<b>341</b>
1. Внешние автоморфизмы . . . . .	341
2. Примеры . . . . .	342
3. Динамические граничные матрицы и внешние автоморфизмы . . . . .	344
<b>Приложение 2. Вырожденные системы в методе классической <math>r</math>-матрицы . . . . .</b>	<b>346</b>
1. Вырожденные системы . . . . .	346
2. Центральные функции в алгебре петель . . . . .	347
3. Вырожденные системы на алгебре $sl(n, \mathbb{C})$ . . . . .	350
4. Магнетик Годена. Система Эйлера–Калоджеро–Мозера	357
<b>Приложение 3. Программа для нахождения переменных разделения в уравнении Гамильтона–Якоби . . . . .</b>	<b>361</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>367</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>383</b>