

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ"

Р.Х. Вахитов, Е.В. Вахитова

**ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ  
АЛГЕБРА**

**Часть II**

**Линейная алгебра**

Учебно-методическое пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр  
Воронежского государственного университета  
2012

## Введение

Содержание данного учебно-методического пособия "Фундаментальная и компьютерная алгебра. Часть II. Линейная алгебра" составляет материал нескольких тем базовой учебной дисциплины профессионального цикла "Фундаментальная и компьютерная алгебра", изучение которой предусмотрено основной образовательной программой подготовки бакалавра по направлению "Математика и компьютерные науки" для студентов факультета компьютерных наук ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный университет". Целью учебной дисциплины является формирование представлений о фундаментальной алгебре: структуры алгебры, линейная алгебра, алгебра многочленов – и о компьютерной алгебре. Основной задачей учебной дисциплины является овладение фундаментальными базовыми знаниями в области фундаментальной и компьютерной алгебры, умением формулировать и доказывать теоремы, самостоятельно решать классические задачи фундаментальной алгебры.

Цель учебно-методического пособия состоит в том, чтобы помочь студентам, изучающим учебную дисциплину "Фундаментальная и компьютерная алгебра", формировать представление о линейной алгебре, приобрести навыки и умения практического использования математических методов при решении задач. В результате изучения учебной дисциплины студент должен знать теоретический материал и уметь формулировать результат, строго доказывать утверждение, грамотно пользоваться языком фундаментальной и компьютерной алгебры.

Книга состоит из пяти глав. В конце каждой главы приведены вопросы для самоконтроля и упражнения для самостоятельной работы. Определения, теоремы и их доказательства иллюстрируются численными примерами, цель которых – пояснить общую теорию.

В каждой главе определения, формулы и теоремы имеют независимую нумерацию.

В первой главе рассмотрены системы линейных уравнений, по-

**Определение 3.** Система линейных уравнений (1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Система линейных уравнений (1) называется несовместной, если она не имеет решения, то есть множество всех ее решений является пустым множеством.

*Пример.*  $F = R$ ,  $m = 2$ ,  $n = 3$ ,

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 2, \end{cases}$$

$\bar{\mu} = (0, 0, 4)$  – решение системы, так как верны оба следующих равенства:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 4 = 4, \\ 0 + 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2, \end{cases}$$

следовательно, система совместна.

## § 2. Следствие системы линейных уравнений

Рассмотрим две системы линейных уравнений с коэффициентами из поля  $F$ :

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \dots, \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \dots, \\ \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \dots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k. \end{cases} \quad (3)$$

**Определение 4.** Система линейных уравнений (3) называется следствием системы линейных уравнений (2), если каждое решение системы (2) является также решением системы (3).

Всякая система линейных уравнений над полем  $F$  с  $n$  переменными является следствием несовместной системы линейных уравнений над полем  $F$  с теми же переменными.

**Теорема 1.** Система линейных уравнений (3) является следствием системы линейных уравнений (2) тогда и только тогда, когда множество всех решений системы (2) является подмножеством множества всех решений системы (3).

Умножим почленно каждое уравнение системы (2) на  $\lambda_i$  из поля  $F$ , а затем сложим почленно все уравнения, тогда после выполнения преобразований получим следующее линейное уравнение:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{21} + \dots + \lambda_m\alpha_{m1})x_1 + \\ &+ (\lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\alpha_{22} + \dots + \lambda_m\alpha_{m2})x_2 + \\ &\quad + \dots + \\ &+ (\lambda_1\alpha_{1n} + \lambda_2\alpha_{2n} + \dots + \lambda_m\alpha_{mn})x_n = \\ &= \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \dots + \lambda_m\beta_m. \end{aligned} \tag{4}$$

**Определение 5.** Линейной комбинацией линейных уравнений системы линейных уравнений (2) с коэффициентами  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$  называется линейное уравнение вида (4).

**Теорема 2.** Всякая линейная комбинация (4) линейных уравнений системы (2) является следствием системы (2).

*Доказательство.* Пусть  $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  — произвольный вектор из  $F^n$ , являющийся решением системы (2), тогда при под-

становке его в систему (2) получим верные равенства:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\varphi_1 + \alpha_{12}\varphi_2 + \dots + \alpha_{1n}\varphi_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}\varphi_1 + \alpha_{22}\varphi_2 + \dots + \alpha_{2n}\varphi_n = \beta_2, \\ \dots, \\ \alpha_{n1}\varphi_1 + \alpha_{n2}\varphi_2 + \dots + \alpha_{nn}\varphi_n = \beta_n. \end{cases} \quad (5)$$

Умножим почленно каждое равенство из (5) на  $\lambda_i$  из поля  $F$ , а затем сложим почленно все уравнения, тогда после выполнения преобразований получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & (\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{21} + \dots + \lambda_m\alpha_{m1})\varphi_1 + \\ & + (\lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\alpha_{22} + \dots + \lambda_m\alpha_{m2})\varphi_2 + \\ & \quad + \dots + \\ & + (\lambda_1\alpha_{1n} + \lambda_2\alpha_{2n} + \dots + \lambda_m\alpha_{mn})\varphi_n = \\ & = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \dots + \lambda_m\beta_m. \end{aligned} \quad (3')$$

Следовательно,

$$\overline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

является решением (4). А так как  $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  – произвольное решение системы (2), тогда каждое решение системы (2) является решением уравнения (4), поэтому линейная комбинация (4) является следствием системы (2).

Теорема 2 доказана.

### § 3. Равносильные системы линейных уравнений

**Определение 6.** Две системы линейных уравнений над полем  $F$  с переменными  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются равносильными, если каждое решение любой из этих систем является решением другой системы.