МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А.П. Трифонов, А.В. Захаров, В.К. Маршаков

АНАЛИЗ ВОЗДЕЙСТВИЯ СИГНАЛА И ШУМА НА ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. ОПТИМАЛЬНЫЕ, СОГЛАСОВАННЫЕ И КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Учебно-методическое пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Линейные системы и их описание

Любое физическое устройство (система), предназначенное для преобразования электрических сигналов, может быть описано с помощью дифференциальных уравнений, связывающих сигналы на входе и на выходе системы. В зависимости от типа этих уравнений производится классификация систем. На практике устройства (системы) для преобразования сигналов описываются тремя типами дифференциальных уравнений:

1) линейные уравнения с постоянными коэффициентами;
2) линейные уравнения с переменными коэффициентами;
3) нелинейные уравнения.

Соответственно различают следующие виды систем:

1) линейные с постоянными параметрами;
2) линейные с переменными параметрами;
3) нелинейные.

Таким образом, система называется <u>*линейной*</u>, если преобразования сигналов в этой системе могут быть описаны с помощью *линейных дифференциальных уравнений* с постоянными или переменными параметрами.

Кроме определения линейной системы с помощью вида уравнения, описывающего систему, можно дать эквивалентные определения:

а) линейной является система, к которой применим принцип суперпозиции;

б) линейной является система, сигнал на выходе которой можно представить в виде

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t,\tau)\, d\tau \,, \tag{1}$$

где $x(t)$ — входной сигнал системы (входное воздействие), а $h(t,\tau)$ — импульсная переходная функция (импульсная характеристика), полностью хаа угловые скобки < > означают статистическое усреднение (усреднение по ансамблю реализаций).

Рассмотрим прохождение суммы (9) полезного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ через линейную систему *с постоянными параметрами*. Подставляя (9) в (4), выходной сигнал системы можно представить в виде

$$y(t) = s_y(t) + n_y(t)\,, \tag{11}$$

где

$$s_y(t) = \int_0^t s(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \tag{12}$$

— полезный выходной сигнал линейной системы,

$$n_y(t) = \int_0^t n(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \tag{13}$$

— реализация шума $\eta(t)$ на выходе системы.

Найдем статистические характеристики случайного процесса $\eta(t)$. Согласно (13), случайный процесс $\eta(t)$ определяется как

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau\,, \tag{14}$$

причем этот интеграл следует понимать как интеграл Римана в среднеквадратическом. Рассмотрим математическое ожидание $m_\eta(t) = \langle \eta(t) \rangle$ и функцию корреляции $K_\eta(t_1, t_2) = \langle [\,\eta(t_1) - m_\eta(t_1)][\,\eta(t_2) - m_\eta(t_2)] \rangle$ случайного процесса $\eta(t)$ (14).

Согласно (14) математическое ожидание $m_\eta(t) = \langle \eta(t) \rangle$ равно

$$m_\eta(t) = \langle \int_0^t \xi(t-u)\, h(u)\, du \,\rangle = \int_0^t \langle \xi(t-u) \rangle\, h(u)\, du = m_\xi \int_0^t h(u) du\,. \tag{15}$$

Здесь учтено, что операция интегрирования является линейной, поэтому операцию усреднения по реализациям можно внести под знак интеграла.

Рассмотрим теперь корреляционную функцию $K_\eta(t_1,t_2)$ выходного шума $\eta(t)$. С учетом (14), (15) имеем

$$K_\eta(t_1,t_2) = \langle \int\limits_0^{t_1} h(\tau)\left[\xi(t_1-\tau)-m_\xi\right] d\tau \int\limits_0^{t_2} h(\tau)\left[\xi(t_2-\tau)-m_\xi\right] d\tau \,\rangle .$$

Заменяя повторное интегрирование двойным и внося операцию усреднения по реализациям под знак интеграла, получаем

$$K_\eta(t_1,t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} h(u)\, h(v) \left\langle\left[\xi(t_1-u)-m_\xi\right]\left[\xi(t_2-v)-m_\xi\right]\right\rangle dudv.$$

Используя определение корреляционной функции и свойство стационарности случайного процесса $\xi(t)$, из последнего выражения находим

$$K_\eta(t_1,t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} h(u)\, h(v)\, K_\xi\,(t_1-t_2+v-u)\, du\, dv. \qquad (16)$$

Из (15), (16) следует, что в общем случае шум $\eta(t)$ на выходе линейной системы является *нестационарным*, даже если входной случайный процесс $\xi(t)$ будет стационарным. Однако линейные пассивные системы (как правило) обладают конечной длительностью импульсной переходной функции (памятью) $T_m < \infty$. Тогда выходной случайный процесс $\eta(t)$ в такой системе будет приближаться к стационарному по истечении достаточно большого времени от момента $t = 0$ включения входного сигнала.

Действительно, пусть T_m — длительность импульсной переходной функции $h(t)$, т.е. длительность переходных процессов или *память системы*. Тогда для всех $t > T_m$ имеем $h(t) = 0$. Если теперь рассматривать выходной шум $\eta(t)$ по истечении большого времени $t > T_m$, $t_1 > T_m$, $t_2 > T_m$, то в формулах (15), (16) пределы интегрирования можно заменить на бесконечные. Тогда для математического ожидания $m_\eta(t)$ и корреляционной функции $K_\eta(t_1,t_2)$ выходного шума $\eta(t)$ получаем

$$m_\eta(t) \equiv m_\eta = m_\xi \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \,,$$

$$K_\eta(t_1, t_2) \equiv K_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(v) K_\xi\,(\tau + v - u)\, du dv. \qquad (17)$$

Таким образом, когда линейная система работает *в стационарном режиме* и на ее вход поступает стационарный случайный процесс, то выходной процесс также будет стационарным. Линейная система работает в стационарном режиме, если с момента подачи сигнала на вход системы прошло время, значительно большее длительности переходных процессов в этой системе или (что то же самое) значительно большее памяти системы.

В стационарном режиме выражение (17) для функции корреляции выходного шума $\eta(t)$ с учетом (6) можно представить как

$$K_\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\, G_\xi(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \qquad (18)$$

где

$$G_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \qquad (19)$$

— спектральная плотность входного шума $\xi(t)$, являющаяся прямым преобразованием Фурье от корреляционной функции входного шума, а $H(j\omega)$ — передаточная функция (5) линейной системы.

1.3. Отношение сигнал-шум

Искажающее (мешающее) действие шума (помехи) можно характеризовать отношением сигнал-шум (ОСШ).

Под *отношением сигнал-шум по мощности* z^2 часто понимают отношение максимальной (пиковой) мощности полезного сигнала к средней мощности шума. Обозначив отношение сигнал-шум по мощности *на входе* линейной системы через z_x^2, в соответствии с определением, получаем

$$z_x^2 = \frac{\max\ |s(t)|^2}{\sigma_\xi^2}\ , \qquad (20)$$

где $\max|s(t)|^2$ –квадрат амплитуды входного сигнала системы, а $\sigma_\xi^2 = K_\xi(0)$ — дисперсия (средняя мощность переменной составляющей) входного шума. Чем больше отношение сигнал-шум, тем меньше шум искажает полезный сигнал. Аналогично (20), отношение сигнал-шум по мощности *на выходе* линейной системы определяется как

$$z_y^2 = \frac{\max\ \left|s_y(t)\right|^2}{\sigma_\eta^2}\ , \qquad (21)$$

где $\max\left|s_y(t)\right|^2$ –квадрат амплитуды выходного сигнала системы, а $\sigma_\eta^2 = K_\eta(0)$ — дисперсия (средняя мощность переменной составляющей) выходного шума.

На практике часто рассматривают *отношение сигнал-шум по напряжению* z, которое равно корню квадратному из отношения сигнал-шум по мощности z^2. В рассматриваемом здесь случае величины z_x и z_y имеют смысл отношения сигнал-шум по напряжению *на входе и выходе системы*.

Чтобы выяснить, как влияет линейная система с постоянными параметрами на отношение сигнал-шум, введем в рассмотрение отношение

$$\rho = \frac{z_y}{z_x} = \frac{\max\left|s_y(t)\right|}{\max|s(t)|} \cdot \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}\ . \qquad (22)$$

Величина ρ показывает, как изменяется отношение сигнал-шум по *напряжению*, если сумму (9) сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ пропустить через линейную систему (фильтр) с постоянными параметрами. Отношение ρ можно интерпретировать *как выигрыш в отношении сигнал-шум*, возникающий в результате применения линейной системы (фильтра). Очевидно, что чем больше значение ρ, тем лучше система (фильтр) подавляет шум (помеху).

Для вычисления выигрыша ρ в отношении сигнал-шум, который дает линейная фильтрация, иногда удобнее использовать спектральные представления. Из (8) следует, что

$$\max_t \left|s_y(t)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)\, H(j\omega)\, e^{j\omega t_0} d\omega\right| ,$$

где t_0 — время достижения выходным полезным сигналом $s_y(t)$ максимального значения. Согласно (18), дисперсия выходного шума равна

$$\sigma_\eta^2 = K_\eta(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 G_\xi(\omega) d\omega \tag{23}$$

При этом дисперсия входного шума по теореме Винера-Хинчина равна

$$\sigma_\xi^2 = K_\xi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega) d\omega. \tag{24}$$

Тогда

$$\rho = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)\, H(j\omega)\, e^{j\omega t_0} d\omega\right|}{2\pi \max|s(t)|}\cdot\left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega)\, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\ |H(j\omega)|^2\, G_\xi(\omega)\, d\omega}\right)^{1/2} , \tag{25}$$

Согласно (25) при изменении передаточной функции фильтра $H(j\omega)$ величина отношения сигнал-шум на выходе фильтра z_y и, следовательно, величина выигрыша ρ, будут также меняться.

Фильтры, для которых величина выигрыша ρ достигает максимального значения, называют *оптимальными*. Можно показать, что для сигнала $s(t)$ со спектром $S(j\omega)$, принимаемого на фоне шума со спектральной плотностью $G_\xi(\omega)$, оптимальным будет фильтр с передаточной функцией

$$H_0(j\omega) = k\frac{S^*(j\omega)}{G_\xi(\omega)} e^{-j\omega t_0}. \tag{26}$$

Здесь k и t_0 — некоторые константы, а «*» обозначает комплексное сопряжение. Согласно (26) передаточная функция оптимального фильтра полностью определяется спектром $S(j\omega)$ полезного сигнала $s(t)$ и спектральной плотностью шума $G_\xi(\omega)$.