Кемеровская государственная
медицинская академия

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

III

Теория вероятностей
Математическая статистика

Кемерово - 2006

ГОУ ВПО «Кемеровская государственная медицинская академия
Федерального агентства по здравоохранению и социальному развитию»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА III

Под редакцией доц. В.И. Бухтояровой

Теория вероятностей
Математическая статистика

Методические указания и задания контрольной работы №3
для студентов II курса заочного отделения факультета
«Экономика и управление на предприятии (здравоохранение)»

Кемерово - 2006

УДК 51(075)-057.875

Высшая математика. Часть III. Теория вероятностей. Математическая статистика / Под ред. к.ф.-м.н. доц. В.И. Бухтояровой // Кемерово, 2006. – 82 с.

Методические указания и контрольные задания для студентов II курса заочного отделения факультета «Экономика и управление на предприятии (здравоохранение)».

Составители: В.И. Бухтоярова, В.М. Гущина, С.Р. Песчанская, Л.К. Равинг

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс высшей математики для студентов заочного отделения факультета «Экономика и управление на предприятии (здравоохранение)» ставит своей целью формирование у студентов базы знаний по высшей математике, необходимой и достаточной для профессиональной Деятельности. Необходимый уровень знаний задается государственным стандартом. Достаточность базы знаний обеспечивается структурой преподавания, направленной на освоение теоретического материала и практическое применение полученных знаний для решения задач экономического содержания.

Методические указания содержат необходимый теоретический минимум, включающий важнейшие определения, теоремы и формулы для решения заданий контрольной работы. На примерах подробно разбираются решения типовых задач по двум фундаментальным разделам контрольной работы:

1. теория вероятностей;
2. математическая статистика.

Методические указания и контрольные задания подготовлены на основании коллективного опыта сотрудников кафедры медицинской и биологической физики и высшей математики Кемеровской государственной медицинской академии.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

Теория вероятностей. Случайные события

Случайные события. Понятие события и вероятности. Классическое определение вероятности. Понятие равновозможности событий. Терминология, свойства вероятности. Частота и вероятность. Статистическая вероятность.

Маловероятные события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Независимые события. Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность появления хотя бы одного события. Независимость событий в совокупности. Теорема сложения вероятностей совместных событий, ее варианты. Формула полной вероятности.

Последовательные испытания. Формула Бернулли, схема последовательных независимых испытаний. Исследование и свойства формулы Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа. Применение интегральной теоремы. Закон Пуассона. Простейший поток событий.

Случайные величины. Понятие случайной величины, ее функции распределения. Свойства функции распределения и ее график. Нормальное распределение. Вероятность попасть в заданный интервал. Оценка отклонения по вероятности. Правило “трех сигм”, практическое использование. Плотность распределения, ее свойства.

Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание дискретной и непрерывной случайной величины. Математическое ожидание нормальной и равномерной случайных величин. Вероятностный смысл математического ожидания. Свойства математического ожидания Дисперсия дискретной и непрерывной случайной величины. Теоремы о дисперсии Свойства дисперсии.

Нормальное распределение. Вероятность попасть в заданный интервал. Оценка отклонения по вероятности. Правило “трех сигм”, практическое использование. Моменты, начальные и центральные, их связь.

Математическая статистика

Генеральная совокупность объектов. Выборка и способы ее организации. Вариационный ряд. Эмпирическое распределение. Полигон и гистограмма. Точечные оценки параметров распределения по выборке. Понятие о доверительных интервалах для математического ожидания и дисперсии. Выравнивание эмпирических распределений. Подбор теоретического распределения. Дополнительные распределения, используемые при статистической обработке. Обработка результатов прямых измерений (оценка случайных погрешностей измерений).

Статистическая проверка гипотез.

Корреляционно-регрессионный анализ.

ŋqdqyeʎ bɐ dedɐbʎɜe d ɐɔɐqɔʎ ɟqdqʎqʎè

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольную работу необходимо выполнять в тетради, оставляя поля (6 см) для замечаний рецензента.
2. На титульном листе указать наименование кафедры и дисциплины; факультет, курс, номер группы; номер контрольной работы и варианта; фамилию, имя, отчество без сокращений; номер зачетной книжки.
3. Условия заданий необходимо написать полностью, без сокращений.
4. Решения заданий необходимо сопровождать пояснениями. Расчеты проводить, соблюдая правила приближенных вычислений.
5. При построении графиков функций соблюдать масштаб по осям координат.
6. В конце контрольной работы указать используемую литературу (автор, название, год издания).

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Перестановками P_m из m различных элементов называют комбинации элементов по m элементов в каждой, которые отличаются только порядком элементов.

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1) \cdot m = m!$$

Символ $m!$ (читается “эм факториал”) есть сокращенное обозначение произведения m последовательных целых чисел от 1 до m.

Пример: Число перестановок из трех элементов $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6$

Принимается (в качестве определения): $1! = 1$; $0! = 1$; $m! = (m-1)! \cdot m$

Размещениями A_n^m из n различных элементов по m элементов в каж-дом называют комбинации элементов, которые отличаются друг от друга либо элементами, либо порядком элементов.

$$A_n^m = n(n-1) \cdot (n-2) \ldots [n-(m-1)]$$

То есть число размещений A_n^m равно произведению m последовательных целых чисел, наибольшее из которых равно n.

Пример: Число размещений из 8 элементов по 3 в каждом

$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

ђqdbqyэY bЕ dэdЕbYзэ d эаэqэу Ɉqdbqyэ

3. ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

Теорема Бернулли

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события постоянна и равна p, а испытание имеет только 2 исхода (событие A или противоположное событие $\overline{A}$), событие A наступит ровно m раз (безразлично в какой последовательности) равна:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

где n – мало; q – вероятность события $\overline{A}$; $q = 1 - p$; $0 < p < 1$; C_n^m – число сочетаний из n элементов по m в каждом.

Частные случаи:

1.Вероятность появления события A в n испытаниях ровно n раз равна

$$P_n(n) = C_n^n \cdot p^n \cdot q^{n-n} = 1 \cdot p^n \cdot q^0 = p^n.$$

2. Вероятность появления события A в n испытаниях 0 раз равна

$$P_n(0) = q^n.$$

3. Вероятность появления события A в n испытаниях не более m раз равна

$$R_n(m) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \cdots + P_n(m).$$

4. Вероятность появления события A в n испытаниях не менее m раз равна $R_n(m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \cdots + P_n(n)$ или $R_n(m) = \sum\limits_{i=m}^{n} P_n(i).$

Теорема Пуассона

В случае, когда вероятность появления события p мала ($p < 0{,}1$), а число независимых испытаний n велико для оценок вероятности появления события ровно m раз в n независимых испытаниях используют асимптотическую формулу Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

где $\lambda = n \cdot p$ и n - велико, p - очень мала.

Для значений функции $e^{-\lambda}$ составлены таблицы (см. “Приложения” таблица 6)

Локальная терема Муавра – Лапласа

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

4. Нормальный закон распределения (закон Гаусса)

Основным объектом теории вероятностей и математической статистики являются случайные величины.

Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает только одно из всех возможных значений, но неизвестно, какое именно.

Случайные величины подразделяют на дискретные и непрерывные.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает конечное или счетное множество значений.

Непрерывной случайной величиной называют такую случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный) числовой оси.

Непрерывная случайная величина считается заданной, если известен закон её распределения. Закон распределения можно задать функцией распределения вероятностей (плотностью вероятности) $f(x)$. Она показывает, как изменяется вероятность, отнесенная к интервалу dx случайной величины, в зависимости от значения самой этой величины:

$$f(x) = \frac{dP}{dx} \Rightarrow dP = f(x)dx.$$

Интегрируя данное выражение, находим вероятность того, что случайная величина принимает какое-либо значение в интервале (a,b):

$$P(a \langle x \langle b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Условие нормировки для непрерывной случайной величины имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Наряду с плотностью вероятности используется также и функция распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx.$$

Эта функция равна вероятности того, что случайная величина принимает значения меньше x:

$$F(x) = P(-\infty \langle X \langle x).$$

Случайная величина распределена по нормальному закону, если её плотность вероятности имеет вид:

Доверительный интервал для средней арифметической μ нормально распределенной ГС.

Выше мы указывали, что наилучшей оценкой генеральной средней μ является $\overline{x}_B$ выборки. Очевидно, что чем точнее $\overline{x}_B$ определяет μ генеральной совокупности, тем меньше абсолютная величина разности $\left|\mu - \overline{x}_B\right|$.

В 1906 г. английский математик У. Госсет (псевдоним "Стьюдент") установил закон распределения случайной величины

$$t = \frac{\overline{x}_B - \mu}{S_{\overline{x}}}$$

Эта величина получила название "параметра Стьюдента ".

Отметим, что для выборок объемом $n > 30$ распределение этого параметра практически не отличается от нормального.

При малых объемах выборки кривая Стьюдента на графике располагается несколько ниже кривой нормального распределения (подробности см. учебник Кремера [1]).

В учебниках по математической статистике обычно приводят таблицу критических значений параметра t (см. таблицу № 2 Приложения). Для его определения по этой таблице необходимо знать соответствующее значение α и число степеней свободы выборки k:

$$k = n - 1$$

На пересечении столбца значения α и строки "k" читаем значение $t_{\alpha,k}$. Он может принимать положительное и отрицательное значения, т.к. его распределение симметричное.

Конкретизируем значение параметра t индексами α и k, т.е. запишем его как $t_{\alpha,k}$. Тогда имеем:

$$\pm t_{\alpha,k} = \frac{\overline{x}_B - \mu}{S_{\overline{x}}}$$

Доверительный интервал можно записать как

$$-t_{\alpha,k} \le \frac{\overline{x}_B - \mu}{S_{\overline{x}}} \le t_{\alpha,k}$$

От этой формы записи нетрудно перейти к виду:

$$\overline{x}_B - t_{\alpha,k} \cdot S_{\overline{x}} \le \mu \le \overline{x}_B + t_{\alpha,k} \cdot S_{\overline{x}}$$

Это и есть стандартная форма записи доверительного интервала для математического ожидания генеральной совокупности, распределенной по закону Гаусса. Доверительный интервал записывают и в виде:

ђqdqyeY bF dedFbYзe d ƨacgcy Jqdqyqyè

где α - уровень значимости. При доверительной вероятности 95% (такая точность используется в фармации, биологии, медицине) уровень значимости $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$,

$k = n - 1$ – число степеней свободы.

$t_{\alpha,k}$ - параметр Стьюдента находится по таблице 2 приложения по α=0,05 и $k = n - 1 = 5$, $t_{0,05;5} = 2{,}57 \cdot 0{,}0696 \approx 0{,}179.$

6. Доверительный интервал измеряемой величины:

$\bar{x}_B - \Delta x < \mu < \bar{x}_B + \Delta x$;

$8{,}03 - 0{,}18 < \mu < 8{,}03 + 0{,}18$;

$7{,}75 < \mu < 8{,}21$ или $\mu = (8 \pm 0{,}2)г$.

7. Предельная относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% = \frac{0{,}18}{8{,}03} \cdot 100\% \approx 2{,}2\%.$$

Ответ: истинное содержание компонента в веществе $\mu = (8{,}0 \pm 0{,}2)г$.
с доверительной вероятностью 0,95.

7; 8 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая гипотезы. Критическая область и область принятия гипотезы.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о характеристиках генеральной совокупности, из которой извлечена выборка. Возможны и другие гипотезы: о равенстве параметров двух или нескольких распределений, о независимости выборок и другие. Например:

1. генеральная совокупность распределена по нормальному закону;
2. математические ожидания двух совокупностей, распределенных по нормальному закону, равны между собой.

В первой гипотезе сделано предположение о виде неизвестного распределения, во второй – о параметрах двух известных распределений.

Различают нулевую и конкурирующую гипотезы.

Нулевой H_0 гипотезой называют предположение о виде функции распределения случайной величины, о параметрах генеральной совокупности ($\mu = \mu_0; \sigma = \sigma_0$), или о равенстве математических ожиданий (или дисперсий) двух и более генеральных совокупностей.

9. ЭЛЕМЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Цель и задачи корреляционного анализа.

Для решения многих задач экономики и медицины требуется установить и оценить зависимость между изучаемыми случайными величинами x и y.

Две случайные величины x и y могут быть связаны функциональной зависимостью, статистической или быть независимыми.

Функциональной зависимостью между величинами x и y называется зависимость, при которой каждому значению x из множества её допустимых значений соответствует одно или несколько значений величины y и обозначается $y = f(x)$. Например, зависимость между объемом шара и его радиусом $\left(V = \dfrac{4}{3}\pi R^3\right)$ является функциональной, т.к. каждому значению радиуса шара R соответствует определенное значение его объема V.

Функциональная зависимость между величинами x и y в экономике и медицине реализуется редко, т.к. обе величины или одна из них подвержены действию случайных факторов. Например, если x - количество вводимого препарата, то его концентрация в крови (y) в произвольный момент времени определяется не только количеством введенного препарата, но и массой больного, скоростью выведения препарата из организма и т. д. В этом случае между величинами возникает статистическая зависимость.

Статистической зависимостью величины y от величины x называют такую зависимость, при которой каждому значению величины x из множества ее возможных значений, соответствует некоторое множество возможных значений величины y, характеризуемое определенным законом распределения. При этом изменение величины x приводит к изменению распределения величины y. Например, зависимость между возрастом ребенка и его весом является статистической, т.к. если у группы детей в возрасте 2-х лет $(x = 2)$ измерить массу тела y, то получим множество различных значений: $y_1 = 12{,}7\,кг$, $y_2 = 13{,}1\,кг$, $y_3 = 13{,}3\,кг$ и т. д.

Частным случаем статистической зависимости является корреляционная зависимость.

Корреляционная зависимость проявляется в том, что при изменении одной величины, например x, изменяется условное среднее значение

$$\mathrm{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_2 - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum^{n}(y_i - \overline{y})^2}} \quad (1).$$

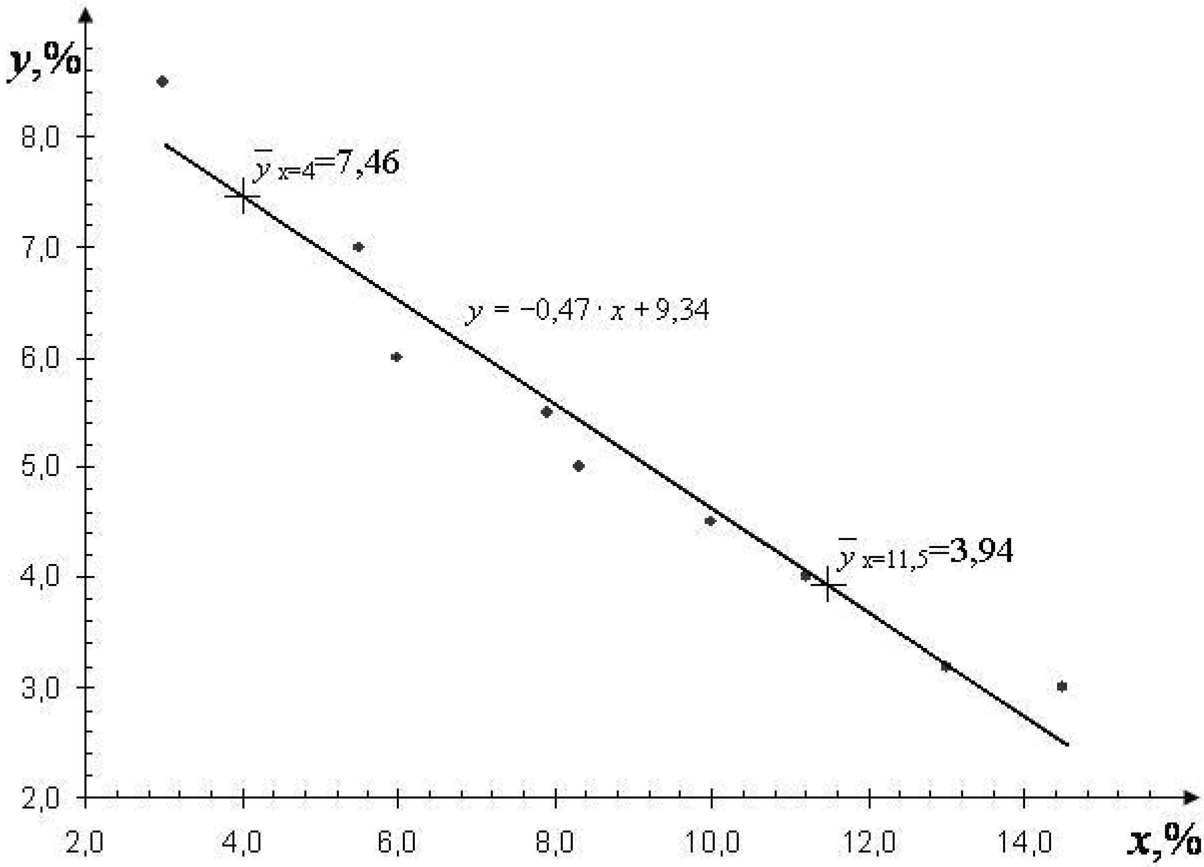

Рис. 7

Для определения коэффициента корреляции r по формуле (1) составляем расчетную таблицу 2. Данные заносим в столбцы 1,2,3:

Таблица 2

Рас-чет	x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(x - \overline{x})(y - \overline{y})$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	14,5	3,0	5,68	-2,19	32,26	4,80	-12,44
2	13,0	3,2	4,18	-1,99	17,47	3,96	-8,32
3	11,2	4,0	2,38	-1,19	5,66	1,42	-2,83
4	10,0	4,5	1,18	-0,69	1,39	0,48	-0,81
5	8,3	5,0	-0,52	-0,19	0,27	0,04	+0,10
6	7,9	5,5	-0,92	+0,31	0,85	0,10	-0,29

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Таблица 4

Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ (ноль и запятая опущены)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3989	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3697	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3202	3187	3187	3187
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2156	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1184	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0433	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0045
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0027	0026	0028	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0004	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ђqdqдуеҮ bЕ dеdЕfbҮзе d ѕаорса+ Јqddҷqуè

Отпечатано редакционно-издательским отделом
ГОУ ВПО КемГМА Росздрава с готового оригинал-макета

650029, Кемерово,
ул. Ворошилова, 22а.
Тел./факс. +7(3842)734856;
epd@kemsma.ru

Подписано в печать 06.10.2006
Гарнитура таймс. Тираж 100 экз.
Формат 21×30/2. У.п.л. 4,8.

Требования к авторам см. на `http://www.kemsma.ru/rio/forauth.shtml`
Лицензия ЛР №21244 от 22.09.97