

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Сибирский федеральный университет

Ю. Я. Белов, Р. В. Сорокин, И. В. Фроленков

# **АППРОКСИМАЦИЯ И КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки 010100 «Математика» и 010200 «Математика и компьютерные науки», 28.12.2010 г.

Красноярск  
СФУ  
2012

УДК 517(07)  
ББК 22.161я73  
Б435

Рецензент — В. М. Садовский, д-р физ.-мат. наук, проф. зам. директора Института вычислительного моделирования СО РАН

**Белов, Ю.Я.**

Б435      Аппроксимация и корректность краевых задач для дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Ю. Я. Белов, Р. В. Сорокин, И. В. Фроленков. — Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2012. — 172 с. ISBN 978-5-7638-2499-5

Учебное пособие посвящено изучению вопросов корректности и аппроксимации некоторых классов краевых задач для дифференциальных уравнений. Рассматриваются постановки прямых и обратных задач для уравнений в частных производных. Исследуются дифференциальные свойства решений и их поведение при больших значениях времени.

Предназначено для студентов направлений подготовки 010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки», 010400 «Прикладная математика и информатика».

**УДК 517(07)**  
**ББК 22.161я73**

# Оглавление

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Предисловие</b>   | <b>5</b>  |
| <b>Глава 1. Вспомогательные утверждения</b>  | <b>7</b>  |
| 1.1. Неравенства. Функциональные пространства . . . . .  | 7         |
| 1.2. Линейное уравнение в частных производных первого порядка .  | 10        |
| 1.3. Принцип максимума и априорные оценки первых производных для параболического уравнения второго порядка . . . . . | 11        |
| <b>Глава 2. Метод слабой аппроксимации</b>   | <b>16</b> |
| 2.1. Понятие метода слабой аппроксимации . . . . .   | 16        |
| 2.2. Общая формулировка метода слабой аппроксимации . . . . .  | 19        |
| 2.3. Теорема сходимости метода слабой аппроксимации . . . . .  | 21        |
| 2.4. Линейное уравнение в частных производных . . . . .  | 24        |
| 2.5. Задача Коши для уравнения Бюргерса . . . . .  | 30        |
| <b>Глава 3. Метод <math>\varepsilon</math>-аппроксимации</b>   | <b>40</b> |
| 3.1. Эволюционные системы уравнений первого порядка с малым параметром при производной по времени . . . . .          | 42        |
| 3.2. Аппроксимация полуэволюционных систем уравнений первого порядка эволюционными . . . . .                         | 46        |
| 3.3. Эволюционные системы уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной . . . . .             | 53        |
| 3.4. Аппроксимация полуэволюционных систем уравнений второго порядка эволюционными . . . . .                         | 57        |
| 3.5. Аппроксимация параболических уравнений гиперболическими   | 59        |
| 3.6. Некоторые примеры . . . . .   | 61        |
| 3.7. Линейная стационарная задача динамики океана . . . . .  | 67        |
| <b>Глава 4. Разрешимость обратных задач в классах гладких функций. Задача Коши</b>                                   | <b>80</b> |
| 4.1. Обратные задачи математической физики . . . . .   | 80        |
| 4.2. Задача идентификации функции источника многомерного параболического уравнения . . . . .                         | 87        |
| 4.3. Задача идентификации коэффициента при младшем члене многомерного параболического уравнения . . . . .            | 97        |

|   |            |
|---|------------|
| 4.4. Задача идентификации коэффициентов при производной по времени и нелинейном выражении двумерного параболического уравнения . . . . .      | 109        |
| <b>Глава 5. Краевые задачи идентификации входных данных</b>   | <b>117</b> |
| 5.1. Разрешимость первой и второй краевых задач идентификации коэффициента при младшем члене многомерного параболического уравнения . . . . . | 117        |
| 5.2. Задача идентификации функции источника. Интегральное переопределение . . . . .   | 121        |
| 5.3. Задача идентификации функции источника. Финальное переопределение . . . . .  | 130        |
| 5.4. Задача идентификации функции источника в случае неизвестного коэффициента, зависящего от времени . . . . .                               | 134        |
| <b>Глава 6. Стабилизация и устойчивость решения</b>   | <b>137</b> |
| 6.1. Поведение при $t \rightarrow +\infty$ решения задачи идентификации функции источника в уравнении теплопроводности . . . . .              | 137        |
| 6.2. Оценка устойчивости решения задачи идентификации функции источника по входным данным . . . . .   | 151        |
| <b>Заключение</b>   | <b>163</b> |
| <b>Библиографический список</b>   | <b>164</b> |