МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

Составители:
Л.В. Безручкина,
П.В. Садчиков

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2019

Методические указания предназначены для активизации самостоятельной работы студентов, изучающих разделы «Частные производные функции нескольких переменных» учебной дисциплины курсов Б1.Б.5 Математика, Б1.Б.6 Математика и Б.1.Б.10 Математика.

Разработка содержит учебный материал практических занятий, темой которых является техника вычисления примеров по темам: «Частные производные функции нескольких переменных»

Пособие может быть использовано студентами для самостоятельного изучения материала и является базой для подготовки к семестровым зачетам и аттестациям по курсам Б1.Б.5 Математика, Б1.Б.6 Математика и Б.1.Б.10 Математика.

Определение функции нескольких переменных

Во многих вопросах геометрии, естествознания и пр. дисциплин приходится иметь дело с функциями двух, трех и более переменных.

<u>Примеры:</u> 1. Площадь треугольника $S=\frac{1}{2}a\cdot h$, где a – основание, а h – высота ($S(a,h)$ – функция двух переменных).

2. Объем прямоугольного параллелепипеда $V=x\cdot y\cdot z$, где x, y и z – длина, ширина и высота соответственно ($V(x,y,z)$ – функция от трех переменных).

<u>Определение.</u> Переменная z называется функцией двух переменных x и y, если каждой упорядоченной паре $(x;y)$ значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области $D\subseteq\mathbb{R}^2$ соответствует единственное число z.

Обозначения: $z=f(x;y)$, $z=F(x;y)$, $z=z(x;y)$ и т.д.

При этом x и y называются аргументами или независимыми переменными, а z – зависимой переменной или функцией.

Множество D всех точек $(x;y)$, при которых $z=f(x;y)$ имеет смысл, называется областью определения, а множество значений z, принимаемых функцией $z=f(x;y)$ при $(x;y)\in D$, называется множеством значений функции.

Каждой тройке (x,y,z) в пространстве $Oxyz$ соответствует точка $M(x,y,z)$. Совершенно аналогично случаю двух переменных можно дать определение функции трех переменных: $z=f(x,y,z)=f(M)$. Областью определения функции трех переменных будет все пространство или его часть.

$$\Delta_x z(M_0) = z(M_1) - z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y z(M_0) = z(M_2) - z(M_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

<u>Определение.</u> Частными производными функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 по переменным x или y называют пределы отношения частного приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю и обозначаются:

$$z_x^/(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x(M_0)}{\Delta x}, \quad z_y^/(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y(M_0)}{\Delta y}.$$

Механический смысл частных производных – мгновенная скорость изменения функции в точке M_0 в направлении оси Ox или Oy.

<u>Определение.</u> Частным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 по x или y называется главная часть частного приращения функции по x или y, линейная относительно Δx или Δy. Обозначаются частные дифференциалы $d_x z(M_0)$ и $d_y z(M_0)$. Легко показать, что частные дифференциалы имеют вид $d_x z(M_0) = z_x^/(M_0) \cdot \Delta x; \quad d_y z(M_0) = z_y^/(M_0) \cdot \Delta y$.

<u>Определение.</u> Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно Δx и Δy, причем если функция имеет полный дифференциал $dz(M_0)$, то $dz(M_0) = z_x^/(M_0) \cdot \Delta x + z_y^/(M_0) \cdot \Delta y$. Тогда полное приращение функции в точке M_0 можно представить в виде $\Delta z(M_0) = dz(M_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)$, где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ бесконечно малого большего порядка малости, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, т.е. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0$.

Если полное приращение функции можно так представить, то функция имеет полный дифференциал и ее называют дифференцируемой в точке, т.е. дифференциал функции есть бесконечно малая величина относительно бесконечных малых Δx и Δy, эквивалентная полному приращению функции.

<u>Теорема</u> <u>(необходимое и достаточное условие дифференцируемости).</u> Функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке непрерывные частные производные.

<u>Замечания.</u>

1) $dz = d_x z + d_y z$

2) $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$

<u>Пример.</u> Найти частные приращения, полное приращение, частные дифференциалы, полный дифференциал, частные производные в точке $M_0(1;2)$ функции $z = xy^2 + 2x + 3y$.

Решение. Возьмем точки $M_1(1+\Delta x;2)$; $M_2(1;2+\Delta y)$; $M(1+\Delta x;2+\Delta y)$, тогда

$$\Delta_x z(M_0) = z(M_1) - z(M_0) = (1+\Delta x)\cdot 4 + 2\cdot(1+\Delta x) + 6 - (4+2+6) =$$

$$= 6\Delta x = d_x z(M_0); \qquad z'_x(M_0) = 6;$$

$$\Delta_y z(M_0) = z(M_2) - z(M_0) = 1\cdot(2+\Delta y)^2 + 2\cdot 1 + 3(1+\Delta y) - 12 =$$

$$= 7\Delta y + (\Delta y)^2 \underset{\Delta y\to 0}{\sim} 7\Delta y; \qquad z'_y(M_0) = 7;$$

$$\Delta z = z(M) - z(M_0) = (+\Delta x)\cdot(2+\Delta y)^2 + 2(1+\Delta x) + 3(+\Delta y) - 12 =$$

$$= 7\Delta y + (\Delta y)^2 + 6\Delta x + 4\Delta x\cdot\Delta y + \Delta x(\Delta y)^2 \underset{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}{\sim} 7\Delta y + 6\Delta x;$$

$$dz(M_0) = 6\Delta x + 7\Delta y$$

для независимых переменных $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$, тогда полный дифференциал имеет вид $dz = z'_x dx + z'_y dy$.

<u>*Замечание.*</u> Частные производные можно обозначить следующим образом: $z'_x \equiv f'_x(x;y) \equiv \dfrac{\partial z}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}$; $z'_y \equiv f'_y(x;y) \equiv \dfrac{\partial z}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$.

Правило нахождения частных производных

Чтобы найти частную производную по одной из переменных x или y, необходимо вторую переменную y или x зафиксировать (т.е. считать постоянной) и находить производную как от функции одной переменной x или y, пользуясь таблицей и правилами нахождения производной для функции одной переменной.

<u>Пример.</u> Найти частные производные по x и y для функции $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$ и полный дифференциал.

Решение. (Такая формулировка, как правило, подразумевает нахождение частных производных первого порядка). В первую очередь найдем частную производную по x (переменную y считаем постоянной):

$$z'_x = \left(2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7\right)'_x = 2y^3\left(x^2\right)'_x + 3\left(x^4\right)'_x + 0 - 0 = 4xy^3 + 12x^3.$$

Аналогично находим частную производную по y (тогда переменная x считается постоянной).

$$z'_y = \left(2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7\right)'_y = 2x^2\left(y^3\right)'_y + 0 + 5(y)'_y - 0 = 6x^2y^2 + 5.$$

Тогда полный дифференциал

$$dz = \left(4xy^3 + 12x^3\right)dx + \left(6x^2y^2 + 5\right)dy.$$

Пример. Найти частные производные по x и y для функции $z = \ln\left(x + y^2\right)$ и полный дифференциал.

Решение.

$$z_x^{/} = \left(\ln\left(x + y^2\right)\right)_x^{/} = \frac{1}{x + y^2} \cdot \left(x + y^2\right)_x^{/} = \frac{1}{x + y^2} \cdot (1 + 0) = \frac{1}{x + y^2};$$

$$z_x^{/} = \left(\ln\left(x + y^2\right)\right)_y^{/} = \frac{1}{x + y^2} \cdot \left(x + y^2\right)_y^{/} = \frac{1}{x + y^2} \cdot (0 + 2y) = \frac{2y}{x + y^2}.$$

Полный дифференциал: $dz = \dfrac{dx + 2ydy}{x + y^2}$.

Пример. Найти частные производные первого порядка функции $z = x^3 \sin y + y^4$

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или $\left(z_x^{/}\right) = 3x^2 \sin y$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}$ или $\left(z_y^{/}\right) = x^3 \cos y + 4y^3$.

Пример. Найти частные производные первого порядка функции $z = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{y}; \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{x}{y^2}\right).$

Производные и дифференциал сложной функции

Пусть $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$. Тогда в конечном итоге z будет функцией одной переменной t. Предположим, что $z_x^{/},\ z_y^{/}$ непрерывны и $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$ существуют. Найдем $\dfrac{dz}{dt}$. Дадим переменной t приращение Δt. Тогда x, y, а, следовательно, и z получат свои приращения $\Delta x,\ \Delta y$ и Δz. В силу достаточного условия дифференцируемости

$$\Delta z = f_x^{/}(x, y)\Delta x + f_y^{/}(x, y)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

откуда $\dfrac{\Delta z}{\Delta t} = f_x^{/}(x, y)\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + f_y^{/}(x, y)\dfrac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$.

Устремим теперь Δt к нулю. Тогда Δx и Δy будут стремиться к нулю, так как функции x и y непрерывны (мы предположили существование производных $x_t^{/}$ и $y_t^{/}$), а потому α и β будут стремиться к нулю. В пределе мы получим

$$\frac{dz}{dt}=f_x^{/}(x,y)\frac{dz}{dt}+f_y^{/}(x,y)\frac{dy}{dt},$$

или, короче

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (*)$$

Формула (*) называется формулой производной сложной функции.

Пример. Найти частные производные функции $z=x^y,\ \ x=\operatorname{arctg}t,\ y=\sin t$.

Решение. $z_x^{/}=y\cdot x^{y-1},\quad z_y^{/}=x^y\cdot\ln x,\quad x_t^{/}=\dfrac{1}{1+t^2},\quad y_t^{/}=\cos t$.

Тогда

$$\frac{dz}{dt}=y\cdot x^{y-1}\cdot\frac{1}{1+t^2}+x^y\cdot\ln x\cdot\cos t=$$

$$=\sin t\cdot\operatorname{arctg}t^{\sin t-1}\cdot\frac{1}{1+t^2}+\operatorname{arctg}t^{\sin t}\cdot\ln(\operatorname{arctg}t)\cdot\cos t=$$

$$=\operatorname{arctg}t^{\sin t}\left(\frac{\sin t}{(1+t^2)\operatorname{arctg}t}+\cos t\cdot\ln(\operatorname{arctg}t)\right)$$

Производная функции, заданной неявно

Если уравнение, с помощью которого задается функция одной переменной x, не разрешено относительно y, то эта функция называется неявной. Разрешая это уравнение относительно y, мы получаем ту же функцию, но уже заданную в явной форме. Однако часто бывает, что разрешить такое уравнение относительно y невозможно (например, $2^y-2y+x^2-1=0$) или нецелесообразно; в этом случае уравнение так и оставляют неразрешенным, в общем виде (когда все его члены перенесены в левую часть):

$$F(x,y)=0$$

В связи с этим возникает вопрос о том, как найти производную неявной функции, не разрешая уравнение $F(x,y)=0$ относительно y.

Рассмотрим функцию одной переменной, заданную неявно $F(x,y)=0$. Подставим зависимость $y(x)$ в уравнение $F(x,y)=0$. Тогда $F(x,y(x))\equiv 0$ и $dF=0$. Отсюда $F_x^{/}\cdot dx+F_y^{/}\cdot dy=0$. Таким образом, получили формулу для производной функции $y(x)$, заданной неявно:

$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x^{/}(x,y)}{F_y^{/}(x,y)}$. Аналогично получаем производную для $x(y)$: $\frac{dx}{dy}=\frac{F_y^{/}(x,y)}{F_x^{/}(x,y)}$. Для существования $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{dx}{dy}$ необходимо выполнение условий $F_x^{/}\neq 0$ или $F_y^{/}\neq 0$.

Пример. Пусть y как функция от x задана соотношением $e^{xy}-x-y=0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

Решение. Для $F(x,y)=e^{xy}-x-y$ имеем $F_x^{/}=ye^{xy}-1,\ F_y^{/}=xe^{xy}-1$ и согласно формуле $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x^{/}(x,y)}{F_y^{/}(x,y)}$ имеем $\frac{dy}{dx}=\frac{1-ye^{xy}}{xe^{xy}-1}$.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции $z=e^{x^2+y^2}$, если $x=a\cos t,\ y=a\sin t$

2. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=x^5+2xy-y^3$ и $x=\cos 2t,\ y=\operatorname{arctg} t$

3. Найти полный дифференциал и частные производные неявной функции z аргументов x и y, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2=9$ в точке $x=1,\ y=-2,\ z=-2$

Частные производные высших порядков

Частные производные функции нескольких переменных сами являются функциями этих переменных и могут иметь частные производные. Для исходной функции эти последние производные будут *частными производными второго порядка*. Так, для функции $z=f(x,y)$ двух независимых переменных можно определить (предполагается, что все производные существуют) четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются символами:

$$z_{xx}^{//}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad z_{yy}^{//}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad z_{xy}^{//}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad z_{yx}^{//}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Частные производные $z_{xy}^{//}$ и $z_{yx}^{//}$, отличающиеся порядком дифференцирования, называются *смешанными частными производными* второго порядка.

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и старших порядков.