

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Сибирский федеральный университет

Федеральное агентство научных организаций  
Федеральный исследовательский центр  
«Красноярский научный центр Сибирского отделения  
Российской академии наук»

**Л. В. Гаврилова, Л. А. Компаниец, В. Е. Распопов**

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДНЫХ ЭКОСИСТЕМ**

Учебное пособие

Красноярск  
СФУ  
2016

УДК 519.711.3:574.5(07)  
ББК 22.181я73+28.081.8я73  
Г124

**Рецензенты:**

*Е. М. Гриценко*, кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой информационных технологий СибГТУ;

*А. И. Урусов*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» ТГТУ

**Гаврилова, Л. В.**  
Г124 Математическое моделирование водных экосистем : учеб. пособие / Л. В. Гаврилова, Л. А. Компаниец, В. Е. Распопов. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2016. – 202 с.

ISBN 978-5-7638-3524-3

Соответствует программе курса «Математическое моделирование водных экосистем», который читается в Сибирском федеральном университете магистрам первого года обучения по направлению «Математика и компьютерные науки». В пособии, с одной стороны, излагаются стандартные принципы математического моделирования, с другой – оригинальные результаты авторов в области натурных измерений и проведении численных экспериментов для расчета экологических состояний конкретных водных объектов. Для лучшего усвоения материала пособие снабжено списком вопросов и задач.

Предназначено для студентов, обучающихся в магистратуре по направлению 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», и преподавателей, ведущих учебные занятия по дисциплине.

Электронный вариант издания см.:  
<http://catalog.sfu-kras.ru>

УДК 519.711.3:574.5(07)  
ББК 22.181я73+28.081.8я73

ISBN 978-5-7638-3524-3

© Сибирский федеральный  
университет, 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ .....	6
ВВЕДЕНИЕ .....	7
Глава 1. ВОДА – ОСНОВА ЖИЗНИ НА ЗЕМЛЕ .....	9
1.1. Физические свойства воды .....	9
1.2. Озера и водохранилища .....	13
1.2.1. Озера в экологии земли .....	13
1.2.2. Стратификация в озерах .....	16
1.2.3. Водоохранилища .....	19
1.2.4. Связь гидрофизических и биологических процессов в открытых водоемах .....	26
Контрольные вопросы и задания .....	27
Список литературы .....	28
Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИДРОФИЗИКИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ВОДОЕМОВ .....	29
2.1. Общие принципы математического моделирования .....	29
2.2. Основные понятия механики сплошной среды .....	31
2.3. Субстанциональная производная .....	35
2.4. Объемные и поверхностные силы .....	37
2.5. Вывод основных уравнений движения жидкости .....	38
2.6. Уравнения Навье–Стокса .....	44
2.7. Основные уравнения геофизической гидродинамики .....	46
2.7.1. Учет силы тяжести и сил Кориолиса .....	46
2.7.2. Турбулентные течения .....	49
2.7.3. Уравнение для температуры и солёности .....	51
2.7.4. Предположение гидростатичности давления .....	52
2.7.5. Приближенное значение для градиентов давления .....	53
2.7.6. Приближение Буссинеска .....	55
2.7.7. Граничные условия .....	56
2.7.8. Уравнение состояния .....	60
2.8. Полная система уравнений и граничных условий геофизической гидродинамики .....	61
2.9. Единственность решения одной упрощенной задачи геофизической гидродинамики .....	63
2.10. Модель Экмана в задачах гидрофизики озер .....	66

2.11. Аналитические решения упрощенных задач гидрофизики с учетом бокового обмена .....	81
2.12. Пример аналитического решения для дрейфовой составляющей в нестационарном случае .....	92
Задачи для самостоятельного решения .....	94
Список литературы.....	95
 Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В БИОЛОГИИ И ЭКОЛОГИИ.....	97
3.1. Биологические звенья водной экосистемы .....	97
3.1.1. Трофическая структура водных экосистем: бактерии, фитопланктон, зоопланктон, рыбы .....	97
3.1.2. Концепция линейной пищевой цепи .....	98
3.1.3. Концепция микробиальной трофической цепи .....	100
3.1.4. Растворенные газы.....	100
3.2. Биогенные элементы .....	101
3.3. История моделирования в экологии вообще и водных экосистем в частности. Мальтус, Ферхюльст, Вольтерра и другие известные ученые .....	104
3.4. Простейшие модели математической биофизики.....	107
3.5. Модели взаимодействия двух видов .....	112
3.5.1. Гипотезы Вольтерра о типах взаимодействий в экосистемах.....	112
3.5.2. Простейшая модель Вольтерра .....	114
3.5.3. Классические модели Лотки и Вольтерра.....	114
3.6. Модели первичной продукции и роста микроводорослей.....	117
3.7. Рост, лимитированный питательными веществами (азот).....	124
3.8. Поглощение света в водных растительных сообществах .....	126
3.9. Математические модели зоопланктонных сообществ .....	127
3.10. Влияние турбулентного перемешивания на развитие биологических процессов в водных экосистемах .....	131
Контрольные вопросы.....	133
Список литературы.....	133
 Глава 4. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОНКРЕТНЫХ ВОДНЫХ ЭКОСИСТЕМ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ .....	135
4.1. Качество воды. Проблема эвтрофирования водоемов .....	135
4.2. Численные методы решения задач экологии.....	138
4.3. Точное решение одного уравнения переноса–диффузии в случае двух пространственных переменных.....	146

4.4. Комплекс программ GETM (GOTM).....	150
4.4.1. Алгоритм для расчета уравнений движения жидкости .....	150
4.4.2. Алгоритм для расчета полей температуры и солености.....	153
4.4.3. Определение коэффициентов горизонтального турбулентного обмена и горизонтальной турбулентной диффузии. Уравнение состояния .....	154
4.5. Взаимодействие биогенных веществ в озере (на примере озера Шира).....	160
4.6. Математическая модель экосистемы Красноярского водохранилища .....	167
4.7. Влияние Красноярской и Саяно-Шушенской ГЭС на экологию реки Енисей .....	177
Задачи для самостоятельного решения .....	180
Список литературы.....	180
 Глава 5. ВЕРИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ БИОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ .....	182
5.1. Задача идентификации входных данных .....	182
5.2. Математическая модель экосистемы гиполимниона.....	183
5.3. Модель вертикальной динамики экосистемы океана.....	190
Контрольные вопросы и задания .....	193
Список литературы.....	194
 ГЛОССАРИЙ.....	195