

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

М.И. Быкова, С.А. Шашкина

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В СИСТЕМЕ MAPLE

Учебно-методическое пособие

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее методическое пособие посвящено одному из важных разделов математической физики, знание которого представляется весьма существенным для научных исследований, сопряженных с математическими расчетами.

Следует отметить, что в настоящее время специалист по прикладной математике не мыслится без хорошего знания компьютера. К числу наиболее замечательных программ, позволяющих автоматизировать вычисления и высококачественно оформить их, можно отнести программу Maple. Этот пакет широко используется для преподавания математики во многих учебных заведениях. Для студентов Maple является неоценимым помощником в изучении разнообразных математических методов, освобождая их от рутинных математических вычислений и сосредотачивая их внимание на существе изучаемого метода. В заключении предлагаемого методического пособия приведены примеры решения задач с использованием замечательных возможностей пакета Maple.

В предлагаемом методическом пособии рассмотрены основные специальные функции, изучаемые в курсе математической физики. Кроме того, предложены примеры задач, решения для которых получены не аналитически, а в системе компьютерной математики Maple. Эта система в последнее время стала полезной для многих пользователей ПК, которые занимаются математическими вычислениями, простирающимися от решения учебных задач в вузах до моделирования сложных физических объектов, систем и устройств. Несомненно, любая научная лаборатория или кафедра вуза должны располагать математической системой, если они всерьез заинтересованы в автоматизации выполнения математических расчетов любой степени сложности. Несмотря на свою направленность на серьезные математические вычисления, системы класса Maple необходимы для широкой категории пользователей: студентам и преподавателям вузов, инженерам, аспирантам, научным работникам и даже учащимся математических классов общеобразовательных и специальных школ. Все они найдут в Maple многочисленные достойные возможности для применения. Надо отметить, что интерфейс Maple интуитивно понятен, простота управления параметрами и легкость подготовки графических процедур позволяет легко визуализировать решения математических задач. Высочайший «интеллект» этой системы символьной математики объединяется в ней с прекрасными средствами математического моделирования, что дает возможность применения такой системы, как Maple, при преподавании и при обучении от самых основ до вершин математики.

Чтобы ряд (2) был решением уравнения (3), необходимо выполнение равенств:

$$\begin{aligned} a_0[\sigma^2 - v^2] &= 0; \\ a_1[(\sigma+1)^2 - v^2] &= 0; \\ a_2[(\sigma+2)^2 - v^2] + a_0 &= 0; \\ \dots \\ a_n[(\sigma+n)^2 - v^2] + a_{n-2} &= 0; \\ \dots \end{aligned}$$

Из первого равенства находим $\sigma = \pm v$, так как $a_0 \neq 0$. Возьмем $\sigma = v$. Тогда из второго равенства находим $a_1 = 0$. Далее,

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(\sigma+n)^2 - v^2} = \frac{-a_{n-2}}{(2v+n)n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Очевидно, $a_{2k+1} = 0$ для всех целых неотрицательных k , а

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{2^{2k}(v+k)k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(v+k-1)\dots(v+1)k!}.$$

Полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$$

и используя формулы $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ и $\Gamma(n+1) = n!$, получим

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+v} \Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)}.$$

Таким образом, мы построили одно формальное решение уравнения (1) в виде обобщенного степенного ряда

$$u = u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}, \quad (4)$$

где z — комплексное переменное, принадлежащее плоскости с разрезом $(-\infty, 0): |z| < \infty, |\arg z| < \pi$; v — параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения. Ограничение, наложенное на z , необходимо для однозначности функции z^v и может быть отброшено, если v — целое число.

Докажем, что ряд (4) сходится. Обозначим общий член этого ряда

$$u_k = \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}.$$

Будем иметь

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{\left(\frac{z}{2} \right)^{2k+2+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)}{\left(\frac{z}{2} \right)^{2k+\nu} (k+1)! \Gamma(k+\nu+2)} \right| = \left| \frac{\left(\frac{z}{2} \right)^2}{(k+1)(k+\nu+1)} \right|, \quad (5)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{z}{2} \right)^2}{(k+1)(k+\nu+1)} \right| = 0, \quad |z| < \infty.$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд (4) сходится при любых конечных z .

В плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$ каждый член ряда (4) — однозначная и регулярная функция комплексного переменного z . Данный ряд сходится при любых z и ν , причем в области $|z| < R$ и $|\nu| < N$ (R, N — произвольно большие фиксированные числа) сходимость равномерна по отношению к каждому из переменных. Действительно, начиная с достаточно большого k , отношение модулей последующего члена ряда к предыдущему, равное на основании (5) величине

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{\left(\frac{z}{2} \right)^2}{(k+1)(k+\nu+1)} \right| \leq \frac{R^2}{4(k+1)(k+1-N)},$$

не будет превосходить некоторой правильной положительной дроби q , не зависящей от z и ν . Отсюда, согласно известному признаку сходимости, следует, что рассматриваемый ряд сходится равномерно в указанной области.

Напомним, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно в некоторой области, если для всякого z , принадлежащего этой области и $k \geq m$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq q < 1,$$

где q не зависит от z .

Так как члены ряда представляют собой регулярные функции в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$, то сумма ряда определяет некоторую функцию комплексного переменного z , регулярную в рассматриваемой области. Эта функция называется *функцией Бесселя первого рода с индексом ν* и обозначается символом $J_\nu(z)$. Таким образом,

$$J_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi. \quad (6)$$

Покажем, что этот ряд в его области сходимости является фактическим решением уравнения (1). Учитывая, что равномерно сходящийся ряд регулярных функций можно дифференцировать почленно, имеем

$$\begin{aligned} u &= \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}, \\ u' &= \frac{(-1)^k (2k+v) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v-1}}{k! \Gamma(k+v+1)}, \\ u'' &= \frac{(-1)^k (2k+v)(2k+v-1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v-2}}{k! \Gamma(k+v+1)}. \end{aligned}$$

Умножаем функцию u на $\left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)$, функцию u' — на $\frac{1}{z}$, функцию u'' — на 1 и складываем, получим

$$\begin{aligned} L(u) &= u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right) u = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k+v)(2k+v-1) + (2k+v) - v^2] z^{2k+v-2}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)}. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$[(2k+v)(2k+v-1) + (2k+v) - v^2] = 2^2 k(k+v).$$

Тогда

$$\begin{aligned} L(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k(k+v) z^{2k+v-2}}{2^{2k+v-2} k! \Gamma(k+v+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} = \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ (k-1) \rightarrow k}}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v-2}}{2^{2k+v-2} (k-1)! \Gamma(k+v)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} = 0. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение несколько новых функций. Будем предполагать, что v не является целым. Для произвольных z , принадлежащих плос-