

УДК 519.6  
ББК 22.193  
Г15

*Рецензенты:* член-кор. РАН М.А. Гузев;  
проф. А.В. Гулин

**Галанин, М. П.**

Г15 Методы численного анализа математических моделей / М. П. Галанин, Е. Б. Савенков. – 2-е изд., испр. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. – 591 [1] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4796-1

Книга отражает актуальный уровень развития численных методов и алгоритмов, ориентированных на применение современной вычислительной техники и позволяющих проводить количественный анализ математических моделей широкого класса реальных природных, социальных и технических объектов.

Изложены методы решения задач линейной алгебры, систем нелинейных алгебраических уравнений, интерполяция функций, методы численного интегрирования и дифференцирования, численные методы решения задачи Коши и краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены основы общей теории разностных схем и ее применение к построению и анализу методов численного решения эллиптических, параболических и гиперболических уравнений, а также численные методы решения интегральных уравнений. Представлены методы генерации сеток для многомерных задач математической физики, многосеточные методы решения, численные методы для решения уравнения переноса и уравнений газовой динамики, алгоритмические основы метода конечных элементов.

Для студентов старших курсов технических университетов, аспирантов и инженеров. Может быть полезна преподавателям и научным работникам.

УДК 519.6  
ББК 22.193

ISBN 978-5-7038-4796-1

- © Галанин М. П., Савенков Е. Б., 2010
- © Галанин М. П., Савенков Е. Б., 2018, с изменениями
- © Оформление. Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие ко второму изданию</b> . . . . .	3
<b>Предисловие к первому изданию</b> . . . . .	5
<b>Основные обозначения</b> . . . . .	7
<b>Введение</b> . . . . .	11
В.1. Предмет и содержание книги . . . . .	11
В.2. История вычислений . . . . .	15
В.2.1. Исторические сведения . . . . .	15
В.2.2. Вычислительный эксперимент . . . . .	16
В.3. Ошибки при вычислениях . . . . .	18
В.3.1. Хранение чисел на ЭВМ и ошибки округления . . . . .	19
В.3.2. Ошибки арифметических операций . . . . .	22
В.3.3. Погрешность алгоритма . . . . .	24
В.4. Библиографические комментарии . . . . .	27
 <b>ЧАСТЬ I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ</b> . . . . .	 29
<b>1. Задачи линейной алгебры. Решение систем линейных алгебраических уравнений</b> . . . . .	31
1.1. Элементы функционального анализа и линейной алгебры . . . . .	31
1.1.1. Линейные пространства . . . . .	31
1.1.2. Операторы в линейных нормированных пространствах . . . . .	34
1.1.3. Операторы в гильбертовом пространстве . . . . .	36
1.1.4. Операторы в конечномерном пространстве . . . . .	38
1.1.5. Нормы векторов и матриц . . . . .	39
1.1.6. Другие нормированные пространства . . . . .	45
1.1.7. Критерий Адамара и лемма Гершгорина . . . . .	46
1.2. Прямые методы решения СЛАУ . . . . .	47
1.2.1. Схема метода Гаусса . . . . .	47
1.2.2. Расчетные формулы метода Гаусса . . . . .	49
1.2.3. Число действий в методе Гаусса . . . . .	49
1.2.4. Выбор главного элемента . . . . .	50
1.3. Обусловленность СЛАУ . . . . .	52
1.4. Метод прогонки решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей . . . . .	55
1.4.1. Метод правой прогонки . . . . .	55

1.4.2. Методы левой и встречной прогонок . . . . .	59
1.4.3. Метод матричной прогонки . . . . .	60
1.5. Метод квадратного корня . . . . .	61
1.6. Итерационные методы решения СЛАУ . . . . .	64
1.6.1. Каноническая форма одношаговых итерационных методов . . . . .	64
1.6.2. Примеры одношаговых итерационных методов .	65
1.6.3. Условия сходимости стационарных итерационных методов . . . . .	68
1.7. Итерационные методы решения СЛАУ вариационного типа . . . . .	71
1.7.1. Расчетные формулы . . . . .	72
1.7.2. Оценка скорости сходимости . . . . .	73
1.7.3. Частные случаи методов . . . . .	75
1.8. Методы сопряженных направлений . . . . .	77
1.9. Итерационное уточнение решения . . . . .	79
1.10. Решение проблемы собственных значений . . . . .	79
1.11. О регуляризации плохо обусловленных СЛАУ . . . . .	81
1.12. Хранение больших разреженных матриц . . . . .	83
1.13. Библиографические комментарии . . . . .	84
<b>2. Решение нелинейных уравнений . . . . .</b>	<b>86</b>
2.1. Решение скалярных уравнений . . . . .	86
2.1.1. Метод деления отрезка пополам (метод «вилки») . . . . .	87
2.1.2. Итерационные методы решения типа простой итерации . . . . .	88
2.1.3. Варианты метода простой итерации . . . . .	90
2.2. Решение систем нелинейных уравнений . . . . .	96
2.2.1. Сходимость стационарного метода . . . . .	96
2.2.2. Примеры итерационных методов . . . . .	98
2.3. Библиографические комментарии . . . . .	101
<b>3. Методы интерполирования функций . . . . .</b>	<b>102</b>
3.1. Постановка задачи интерполяции. Простейшие варианты интерполирования . . . . .	102
3.1.1. Кусочно-линейная интерполяция . . . . .	103
3.1.2. Варианты интерполяции . . . . .	106
3.2. Полиномиальная интерполяция . . . . .	106
3.2.1. Интерполяционный полином в форме Лагранжа . . . . .	108
3.2.2. Интерполяционный полином в форме Ньютона . . . . .	111
3.2.3. Интерполяционный полином Эрмита . . . . .	114

3.3.	Сходимость и устойчивость полиномиальной интерполяции . . . . .	117
3.3.1.	Оптимизация узлов сетки . . . . .	117
3.3.2.	Устойчивость интерполяционного полинома относительно погрешностей функции . . . . .	119
3.3.3.	Устойчивость интерполяционного полинома относительно априорной информации . . . . .	120
3.3.4.	Наилучшие приближения в гильбертовом пространстве . . . . .	124
3.3.5.	Насыщаемость алгоритма интерполяции. Тригонометрическая интерполяция . . . . .	127
3.4.	Сплайн-интерполяция . . . . .	129
3.5.	Двумерная интерполяция . . . . .	133
3.5.1.	Прямоугольная сетка . . . . .	133
3.5.2.	Треугольная сетка . . . . .	135
3.6.	Библиографические комментарии . . . . .	137
4.	<b>Методы численного интегрирования и дифференцирования</b> . . . . .	138
4.1.	Простейшие квадратурные формулы . . . . .	138
4.1.1.	Формула прямоугольников . . . . .	139
4.1.2.	Формула трапеций . . . . .	140
4.1.3.	Формула Симпсона . . . . .	141
4.2.	Квадратурные формулы интерполяционного типа . . . . .	142
4.3.	Квадратурные формулы Гаусса . . . . .	147
4.4.	Интегрирование быстроосциллирующих функций . . . . .	151
4.5.	Вычисление несобственных интегралов I и II рода . . . . .	152
4.6.	Вычисление кратных интегралов . . . . .	155
4.7.	Численное дифференцирование . . . . .	157
4.8.	Библиографические комментарии . . . . .	164
5.	<b>Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений</b> . . . . .	165
5.1.	Постановка задачи и простейшие методы . . . . .	165
5.1.1.	Симметричная схема . . . . .	168
5.1.2.	Метод Рунге — Кутты второго порядка . . . . .	169
5.2.	Методы Рунге — Кутты . . . . .	170
5.3.	Многошаговые разностные методы . . . . .	175
5.3.1.	Погрешность аппроксимации многошаговых методов . . . . .	176
5.3.2.	Устойчивость и сходимость разностных методов . . . . .	177
5.3.3.	Примеры методов Адамса . . . . .	179

5.4.	Понятие о методах решения жестких систем . . . . .	180
5.4.1.	Условно устойчивые и безусловно устойчивые раз- ностные методы . . . . .	180
5.4.2.	Понятие жесткой системы ОДУ . . . . .	181
5.4.3.	Решение жестких систем . . . . .	182
5.5.	Библиографические комментарии . . . . .	186
<b>6.</b>	<b>Решение краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .</b>	<b>188</b>
6.1.	Постановка задачи. Метод стрельбы . . . . .	188
6.2.	Разностные методы . . . . .	191
6.2.1.	Линейная краевая задача второго порядка . . . . .	192
6.2.2.	Нелинейные задачи . . . . .	194
6.3.	Методы Рунге и Галеркина . . . . .	195
6.3.1.	Метод Рунге . . . . .	196
6.3.2.	Метод Галеркина . . . . .	197
6.3.3.	Выбор системы функций . . . . .	198
6.4.	Библиографические комментарии . . . . .	198
<b>7.</b>	<b>Элементы теории разностных схем . . . . .</b>	<b>200</b>
7.1.	Постановка задачи и основные понятия . . . . .	200
7.1.1.	Постановка задачи . . . . .	200
7.1.2.	Сетка и сеточные функции . . . . .	202
7.2.	Обозначения и некоторые разностные соотношения . . . . .	210
7.3.	Методы и приемы конструирования разностных схем . . . . .	214
7.3.1.	Метод разностной аппроксимации . . . . .	214
7.3.2.	Интегро-интерполяционный метод . . . . .	215
7.3.3.	Метод неопределенных коэффициентов . . . . .	217
7.3.4.	Другие методы получения алгебраических уравне- ний . . . . .	218
7.3.5.	Аппроксимации в нерегулярных точках . . . . .	219
7.4.	Основные качественно-количественные характеристики разностных схем и их виды . . . . .	221
7.4.1.	Аппроксимация . . . . .	221
7.4.2.	Устойчивость . . . . .	224
7.4.3.	Сходимость . . . . .	225
7.4.4.	Качественно-количественные виды схем . . . . .	227
7.5.	Разделение переменных в дискретном случае . . . . .	229
7.6.	Принцип максимума для разностных схем . . . . .	234
7.7.	Устойчивость разностных схем . . . . .	237

7.7.1. Применение принципа максимума к исследованию устойчивости по граничным условиям первого рода и начальным данным . . . . .	238
7.7.2. Признаки равномерной устойчивости . . . . .	238
7.7.3. Использование метода разделения переменных . . . . .	243
7.7.4. Необходимый «спектральный» признак устойчивости схемы по начальным данным . . . . .	244
7.7.5. Метод энергетических неравенств . . . . .	245
7.8. Библиографические комментарии . . . . .	246
<b>8. Численное решение параболических уравнений . . . . .</b>	<b>248</b>
8.1. Линейное одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами. Схема с весами . . . . .	248
8.1.1. Аппроксимация схемы с весами . . . . .	249
8.1.2. Устойчивость схемы с весами . . . . .	251
8.1.3. Сходимость и точность схемы с весами . . . . .	257
8.2. Некоторые другие задачи и схемы . . . . .	257
8.2.1. Задача с переменными коэффициентами . . . . .	258
8.2.2. Схема «бегущего» счета для решения уравнения теплопроводности . . . . .	260
8.2.3. Трехслойные схемы . . . . .	262
8.3. Библиографические комментарии . . . . .	263
<b>9. Численное решение гиперболических уравнений . . . . .</b>	<b>264</b>
9.1. Линейное одномерное уравнение переноса . . . . .	264
9.1.1. Явная схема с левой разностью (схема 1) . . . . .	266
9.1.2. Явная схема с правой разностью (схема 2) . . . . .	268
9.1.3. Явная схема с центральной разностью (схема 3) . . . . .	270
9.1.4. Неявная схема с левой разностью (схема 4) . . . . .	270
9.1.5. Неявная схема с правой разностью (схема 5) . . . . .	271
9.1.6. Неявная схема с центральной разностью (схема 6) . . . . .	272
9.1.7. Уравнение переноса с отрицательной или переменной скоростью . . . . .	274
9.1.8. Интерполяционный метод построения некоторых других схем для уравнения переноса . . . . .	275
9.2. Монотонность схем для уравнения переноса . . . . .	278
9.3. Дифференциальное приближение . . . . .	280
9.4. Волновое уравнение . . . . .	284
9.5. Библиографические комментарии . . . . .	288

<b>10. Численное решение эллиптических уравнений . . . .</b>	<b>289</b>
10.1. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона . . .	289
10.2. Разностная схема для уравнения Пуассона повышенного порядка точности . . . . .	292
10.3. Собственные функции разностного оператора Лапласа и их применение . . . . .	293
10.3.1. Разностная задача Штурма — Лиувилля в дву- мерном случае . . . . .	293
10.3.2. Численное нахождение решения разностной за- дачи . . . . .	295
10.4. Экономичные разностные схемы для решения уравнения теплопроводности в многомерном случае . . . . .	299
10.4.1. Продольно-поперечная схема . . . . .	300
10.4.2. Локально-одномерная схема . . . . .	302
10.5. Проекционные методы решения эллиптических уравне- ний . . . . .	304
10.5.1. Метод Рунге . . . . .	304
10.5.2. Метод Галеркина . . . . .	309
10.6. Оператор Лапласа в криволинейных координатах и его разностная аппроксимация . . . . .	311
10.6.1. Цилиндрические координаты . . . . .	312
10.6.2. Сферические координаты . . . . .	314
10.7. Библиографические комментарии . . . . .	315
<b>11. Численное решение интегральных уравнений . . . .</b>	<b>317</b>
11.1. Корректно поставленные задачи . . . . .	317
11.1.1. Разностный метод численного решения . . . . .	319
11.1.2. Метод последовательных приближений . . . . .	321
11.1.3. Замена ядра вырожденным . . . . .	323
11.1.4. Метод Галеркина (метод моментов) . . . . .	325
11.2. Некорректные задачи . . . . .	326
11.2.1. Предпосылки метода регуляризации . . . . .	327
11.2.2. Понятие регуляризирующего оператора и при- мер регуляризации операторного уравнения пер- вого рода . . . . .	329
11.2.3. Примеры некорректно поставленных задач . . .	334
11.3. Библиографические комментарии . . . . .	336
<b>ЧАСТЬ II. ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПРАК-</b>	
<b>ТИКИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ . . . . .</b>	<b>337</b>
<b>12. Методы триангуляции пространственных областей</b>	<b>339</b>
12.1. Методы триангуляции и оценка качества сетки . . . .	339

12.1.1. Классификация методов . . . . .	341
12.1.2. Оценка качества сетки . . . . .	344
12.1.3. Особенности построения сеток в сложных обла- стях . . . . .	345
12.2. Прямые методы . . . . .	347
12.2.1. Методы на основе шаблонов . . . . .	348
12.2.2. Методы отображения . . . . .	357
12.3. Методы граничной коррекции . . . . .	361
12.3.1. Построение первичной сетки . . . . .	362
12.3.2. Коррекция первичной сетки . . . . .	364
12.4. Методы на основе критерия Делоне . . . . .	367
12.4.1. Построение триангуляции Делоне на заданном на- боре точек . . . . .	369
12.4.2. Триангуляции Делоне с ограничениями . . . . .	373
12.4.3. Особенности технической реализации алгоритмов на основе критерия Делоне . . . . .	377
12.5. Метод исчерпывания . . . . .	378
12.6. Оптимизация сеток . . . . .	381
12.6.1. Оптимизация расположения узлов, или сглажива- ние сетки . . . . .	382
12.6.2. Оптимизация связей . . . . .	383
12.6.3. Сгущение сетки . . . . .	384
<b>13. Многосеточные методы . . . . .</b>	<b>386</b>
13.1. Проблема решения больших сеточных задач . . . . .	386
13.2. Основы многосеточных методов . . . . .	387
13.3. Классические многосеточные методы . . . . .	392
13.3.1. Пример одномерной задачи . . . . .	393
13.3.2. Основные направления развития КММ . . . . .	402
13.4. Универсальная многосеточная технология . . . . .	408
<b>14. Численное решение уравнения переноса . . . . .</b>	<b>415</b>
14.1. Уравнение переноса: постановка задачи . . . . .	415
14.2. Линейное одномерное уравнение переноса . . . . .	419
14.2.1. Постановка задачи для линейного одномерного уравнения переноса. Тестовые задачи . . . . .	419
14.2.2. Разностные схемы для линейного одномерного уравнения переноса . . . . .	420
14.2.3. Метод нелинейной монотонизации разностных схем для линейного одномерного уравнения переноса . . . . .	430
14.2.4. Результаты расчетов для одномерного линейного уравнения переноса . . . . .	433



14.3. Одномерное квазилинейное уравнение . . . . .	436
14.3.1. Постановка задачи для квазилинейного одномерного уравнения переноса. Тестовые задачи . . .	436
14.3.2. Нелинейная монотонизация схемы К.И. Бабенко для квазилинейного одномерного уравнения переноса . . . . .	438
14.3.3. Результаты расчетов для одномерного квазилинейного уравнения переноса . . . . .	440
14.3.4. Решение квазилинейного уравнения переноса с помощью разрывного метода Галеркина . . . . .	444
14.4. Двумерное линейное уравнение переноса . . . . .	448
14.4.1. Постановка задачи для линейного двумерного уравнения переноса. Тестовые задачи . . . . .	448
14.4.2. Разностные схемы для численного решения линейного двумерного уравнения . . . . .	450
14.4.3. Результаты расчетов для линейного двумерного уравнения переноса . . . . .	451
<b>15. Численное решение уравнений газовой динамики . .</b>	<b>455</b>
15.1. Уравнения газовой динамики . . . . .	455
15.2. Разностная схема Роу — Эйнфельдта — Ошера . . . .	459
15.2.1. Основные уравнения . . . . .	461
15.2.2. Схема Лакса — Фридрихса . . . . .	464
15.2.3. Схемы годуновского типа (линейный случай) . .	467
15.2.4. Схемы годуновского типа (нелинейный случай). Схема Роу . . . . .	470
15.2.5. Энтропийное условие . . . . .	473
15.2.6. Схемы повышенного порядка аппроксимации . .	477
15.2.7. Схема Роу для двумерной газовой динамики . .	485
15.2.8. Упрощенная схема Роу — Эйнфельдта — Ошера и схема Лакса — Фридрихса — Ошера . . . . .	493
15.2.9. Схема Роу для решения уравнений трехмерной газовой динамики . . . . .	496
15.2.10. Другие схемы газовой динамики . . . . .	500
<b>16. Теоретические и алгоритмические основы метода конечных элементов . . . . .</b>	<b>501</b>
16.1. Метод конечных элементов и его варианты . . . . .	501
16.2. Метод взвешенных невязок . . . . .	502
16.3. Метод Бубнова — Галеркина . . . . .	505
16.3.1. Обобщенные решения и слабая постановка задачи	506
16.3.2. Аппроксимация методом Бубнова — Галеркина	512

16.3.3. Сходимость метода Бубнова — Галеркина . . .	513
16.4. Вариационно-сеточные методы . . . . .	514
16.4.1. Метод Ритца . . . . .	515
16.4.2. Метод наименьших квадратов . . . . .	517
16.5. Метод конечных элементов . . . . .	518
16.5.1. Двумерное уравнение Пуассона . . . . .	519
16.5.2. Линейная задача теории упругости . . . . .	528
16.5.3. Численное интегрирование . . . . .	539
16.5.4. Конечные элементы высокого порядка . . . . .	540
16.6. О применении МКЭ к решению других задач . . . . .	546
16.7. Основы метода граничных элементов . . . . .	548
16.7.1. Постановка задачи. Граничные интегральные уравнения . . . . .	550
16.7.2. Аппроксимации метода граничных элементов .	556
16.7.3. Алгоритмические аспекты . . . . .	560
<b>Литература</b> . . . . .	561
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	577