

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

математика и информатика

$$\int_a^b K(x, t)y(t)dt$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.А. Шишкин

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Рекомендовано Учебно-методическим советом БГУ
в качестве учебно-методического пособия для студентов
и магистров специальностей/направлений
010400.62 Прикладная математика и информатика,
010501.65 Прикладная математика и информатика,
010400.68 Прикладная математика и информатика,
а также для студентов других специальностей,
где изучаются интегральные уравнения


ИЗДАТЕЛЬСТВО
Улан-Удэ
2014

УДК 511 968
ББК 22.161.6я73
Ш 655

Утверждено к печати
редакционно-издательским
советом Бурятского государственного университета

Рецензенты

*А.Д. Мишидон, д-р техн. наук, проф.
В.В. Кибирев, канд. физ.-мат. наук, проф.*

Шишкин Г.А.
Ш 655 Линейные интегральные уравнения Фредгольма: учеб.-метод. пособие. – Улан-Удэ: Издательство Бурятского государственного университета, 2014. – 106 с.

В пособии кратко изложены основные разделы теории интегральных уравнений Фредгольма. Главное внимание уделено вопросам, касающимся типов уравнений и методов их решения. Рассмотрены теорема существования и единственности решения и ряд других наиболее важных теорем. К каждому типу уравнений и рассмотренных в пособии методов их решения приведены примеры с решениями, в последнем параграфе дан список задач для самостоятельного решения.

Пособие предназначено студентам специальности «Прикладная математика и информатика», может использоваться студентами специальностей: «Математика», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и др.

**УДК 511 968
ББК 22.161.6я73**

© Бурятский государственный университет, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение называют интегральным, если неизвестная функция входит в уравнение под знаком интеграла. Интегральные уравнения – это функциональные уравнения специального типа, история которых тесно связана с задачами математической физики, в частности с проблемой колебания твердого тела [2; 12]. Теория интегральных уравнений составляет значительный раздел математического анализа и имеет большое теоретическое и прикладное значение. В настоящее время все чаще интегральные уравнения рассматривают как самостоятельное научное направление. Отдельные же интегральные уравнения встречались уже в первой половине XIX в., но систематическая их теория была заложена на рубеже XIX–XX вв. в работах итальянского математика В. Вольтерра (1860–1940), шведского математика Э.И. Фредгольма (1866–1927), Д. Гильберта (1862–1943) и других математиков [20].

Этот направление в математике своим возникновением обязано Даниилу Бернулли, а затем в течение двух столетий усилия математиков были направлены на решение проблемы колебаний среды (механической, акустической, оптической, электромагнитной) и связанной с ней краевой задачей теории потенциала, которая сводится к решению интегральных уравнений.

Возможно, первый результат, который можно связать с интегральными уравнениями, это формулы обращения Фурье (1811):

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(t) \cos tx \, dt, \quad (1)$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos tx \, dt. \quad (2)$$

Можно считать, что формула (2) даст решение интегрального уравнения (1), в котором $g(x)$ – неизвестная, а $f(x)$ – данная функция.

Работа Фурье «Théorie analytique de la chaleur» (1822) стала вехой на этом пути.

В последнее десятилетие XIX в. Пуанкаре разработал теоретико-функциональные методы и вместе с К. Нейманом они приступили к рассмотрению гармонической краевой задачи, которая сводилась к решению интегрального уравнения.

Однако из-за того, что в более простых ситуациях в непрерывном предельном случае возникают дифференциальные, а не интегральные уравнения, на целых два столетия внимание математиков было уделено дифференциальным уравнениям.

Значимой в изучении линейных интегральных уравнений стала работа В. Вольерра (1896), в которой исследованы уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^{\infty} K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad (3)$$

где $\varphi(x)$ – неизвестная функция, $K(x, s)$ и $f(x)$ – данные функции, λ – численный параметр, он доказал, что если $K(x, s)$ и $f(x)$ непрерывны в некотором сегменте $[a, b]$, то в этом сегменте уравнение (3) имеет при любом значении λ одно и только одно непрерывное решение, которое можно построить по методу последовательных приближений.

В 1900 г. Э.И. Фредгольм изложил основные свойства и теории теории линейных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования, разработал общие методы решения этого вида уравнений, которые теперь называют уравнениями Фредгольма. Фредгольм дал красивое и оригинальное решение этого класса уравнений, что открывало некоторую аналогию между интегральными и алгебраическими линейными уравнениями. В работах Фредгольма была реализована также идея превращения системы линейных уравнений, описывающей дискретную систему масс, в интегральные уравнения при переходе к предельному случаю сплошной среды. Тем не менее отметим, что результаты Фредгольма вытекают из специального вида его уравнения, которое возникает при решении проблем математической физики [2; 10; 12].

Интегральные уравнения встречаются в различных областях науки и многочисленных приложениях (в теории упругости, теории пластичности, гидродинамике, теории массо- и теплопереноса, тео-

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Классификация интегральных уравнений Фредгольма	6
2. Решение интегральных уравнений Фредгольма методом последовательных приближений	9
3. Уравнения с вырожденными ядрами	12
4. Решение интегральных уравнений Фредгольма с помощью ряда Неймана	15
5. Итерированные ядра и резольвента интегральных уравнений Фредгольма	18
6. Решение линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода методом последовательных подстановок	23
7. Уравнение Фредгольма как предел системы конечного числа линейных алгебраических уравнений. Фундаментальные соотношения Фредгольма	27
8. Доказательство сходимости рядов Фредгольма	33
9. Решение линейного уравнения, данное Фредгольмом при $D(\lambda) \neq 0$. Первая фундаментальная теорема Фредгольма.....	35
10. Решение однородных интегральных уравнений. Вторая фундаментальная теорема Фредгольма	40
11. Собственные значения и собственные функции и их вычисление	55
12. Вычисление собственных значений и собственных функций по методу Келлога	59
13. Сопряженные однородные интегральные уравнения.....	63
14. Решение неоднородных интегральных уравнений для случая, когда $D(\lambda) = 0$. Третья фундаментальная теорема Фредгольма	70
15. Теорема Адамара	76
Задачи для самостоятельного решения	80
Приложения	102
Библиографический список	104

Учебное издание

Геннадий Александрович Шишкин

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е.П. Евдокимова*
Компьютерная верстка *Т.А. Олоевой*

Свидетельство о государственной аккредитации
№ 1289 от 23 декабря 2011 г.

Подписано в печать 15.09.2014. Формат 60х84 1/16.
Уч.-изд. л. 5,73. Усл. печ. л. 6,17. Тираж 65. Заказ 194.
Цена договорная

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
riobsu@gmail.com

Отпечатано в типографии Издательства
Бурятского государственного университета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Сухэ-Батора, 3а

