

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Т.М. Леденева, С.Ю. Балашева

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Ключевые понятия: множество, подмножество, булеан, отношения включения и равенства множеств, операции над множествами и их свойства, покрытие и разбиение, мощность множества, счетные множества, равномощные множества, эквивалентные множества, формула включений и исключений.

1.1. Операции над множествами и их свойства

Задача 1.1.1. Пусть заданы множества

$$A = \{x : 1 \leq x \leq 12 \text{ и } x - \text{четное целое число}\},$$

$$B = \{x : 1 \leq x \leq 12 \text{ и } x - \text{целое число, кратное } 3\}.$$

Найдите множества $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$. Постройте характеристические векторы исходных и искомых множеств.

Решение. Прежде всего, заметим, что универсальным множеством здесь является множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, тогда $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Пересечение множеств $A \cap B$ содержит элементы, которые одновременно принадлежат обоим множествам, т.е. $A \cap B = \{6, 12\}$. Объединение множеств содержит элементы из U , которые встречаются в A или в B , т.е. $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$. Множество $A \setminus B$ содержит те элементы из A , которые не принадлежат B , т.е. $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10\}$. Аналогично, $B \setminus A = \{3, 9\}$. Учитывая, что $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, получим $A \Delta B = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$.

Выпишем характеристические векторы исходных множеств

$$A = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1), B = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1).$$

Найдем

$$A \cap B = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), A \cup B = (0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1),$$

$$A \setminus B = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0), B \setminus A = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0),$$

$$A \Delta B = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0).$$

Задача 1.1.2. Выясните взаимное расположение множеств

принадлежит множеству $A \cap B \cup A \cap C$. Итак, пусть $x \in A \cap (B \cup C)$, тогда $x \in A$ и $x \in B \cup C$. Если $x \in B$, то $x \in A \cap B$, а, следовательно, $x \in A \cap B \cup A \cap C$. Если $x \in C$, то $x \in A \cap C$, и тогда, $x \in A \cap B \cup A \cap C$. Таким образом, $A \cap (B \cup C) \subseteq A \cap B \cup A \cap C$.

Теперь докажем, что $A \cap B \cup A \cap C \subseteq A \cap (B \cup C)$. Пусть $x \in A \cap B \cup A \cap C$. Если $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и $x \in B$. Отсюда следует, что $x \in A$ и $x \in B \cup C$, т.е. $x \in A \cap (B \cup C)$. Если $x \in A \cap C$, то $x \in A$ и $x \in C$. Отсюда следует, что $x \in A$ и $x \in B \cup C$, т.е. $x \in A \cap (B \cup C)$. Итак, $A \cap B \cup A \cap C \subseteq A \cap (B \cup C)$. Таким образом, получили, что $A \cap (B \cup C) \subseteq A \cap B \cup A \cap C$ и $A \cap B \cup A \cap C \subseteq A \cap (B \cup C)$, а это означает, что эти два множества равны.

Замечание. Решение подобных задач можно оформлять в более формализованном виде, используя скобки $\{$ для системы высказываний, объединенных союзом «и», $[$ – для системы высказываний, объединенных союзом «или».

Задача 1.1.6. Докажите следующее утверждение: если $X \subseteq Y$, то $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$.

Решение. Чтобы доказать $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$, выберем произвольный элемент $x \in \bar{Y}$ и покажем, что $x \in \bar{X}$. Итак,

$$\begin{aligned} x \in \bar{Y} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in U \\ x \notin Y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in X \cup \bar{X} \\ x \notin Y \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in X \\ x \in \bar{X} \\ x \in \bar{Y} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in X \\ x \in \bar{Y} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in \bar{X} \\ x \in \bar{Y} \end{array} \right\} \end{array} \right] \xRightarrow{X \subseteq Y} \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in X \\ x \in \bar{Y} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in \bar{X} \\ x \in \bar{Y} \end{array} \right\} \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in E \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in \bar{X} \\ x \in \bar{Y} \end{array} \right\} \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \bar{X} \\ x \in \bar{Y} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \bar{X} \end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$, что и требовалось доказать.

Задача 1.1.7. Докажите, что $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Решение. Заметим, что подобные задачи можно решать как на основе определения, так и с помощью равносильных преобразований. Используя

свойства операций над множествами, покажем, что правую часть выражения с помощью равносильных преобразований можно свести к левой.

$$\begin{aligned}(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \bar{C}) \cap \overline{(B \cap \bar{C})} = (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup \bar{\bar{C}}) = (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) = \\ &= (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C} \cap C) = (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \emptyset) = (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup \emptyset = \\ &= A \cap \bar{C} \cap \bar{B} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = (A \setminus B) \setminus C\end{aligned}$$

Задача 1.1.8. Упростите выражение

$$(A \cap B \cap Y \cap \bar{X}) \cup (\bar{A} \cap Y) \cup (\bar{B} \cap Y) \cup (Y \cap X).$$

Решение. Упростим выражение с помощью равносильных преобразований

$$\begin{aligned}& (A \cap B \cap Y \cap \bar{X}) \cup (\bar{A} \cap Y) \cup (\bar{B} \cap Y) \cup (Y \cap X) = \\ &= (A \cap B \cap Y \cap \bar{X}) \cup (Y \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup X)) = \\ &= (Y \cap (A \cap B \cap \bar{X})) \cup (Y \cap (\overline{A \cap B \cap \bar{X}})) = \\ &= Y \cap ((A \cap B \cap \bar{X}) \cup (\overline{A \cap B \cap \bar{X}})) = Y \cap U = Y.\end{aligned}$$

Задача 1.1.9. Решите систему уравнений относительно множества X

$$\begin{cases} C \Delta B = X \cap A \\ X \setminus C = A \cap B \\ C \subseteq A \cap B \end{cases}$$

и укажите условия совместности системы.

Решение. Построим множества A, B, X , находящиеся в общем положении, и множество C , которое, с одной стороны, удовлетворяет условию $C \subseteq A \cap B$, а с другой – находится в общем положении с множеством X (рис. 1.2). Итак, имеем $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $C = \{3, 7\}$, $X = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Проанализируем систему уравнений. Рассмотрим левую и правую части первого уравнения. $C \Delta B = \{2, 4, 6, 8\}$, $X \cap A = \{5, 6, 7\}$. По условию эти множества равны, следовательно, списки элементов 2, 4, 5, 7, 8 пусты. Тогда получим $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{3, 6\}$, $C = \{3\}$, $X = \{6, 9\}$. Для второго уравнения

системы $X \setminus C = \{6, 9\}$, $A \cap B = \{3, 6\}$. Поскольку данные множества равны, то списки элементов 3 и 9 пустые, поэтому $A = \{1, 6\}$, $B = \{6\}$, $C = \emptyset$. Поскольку $C = \emptyset$, то последнее соотношение в системе выполняется всегда. Таким образом, решением системы является множество $X = \{6\}$.

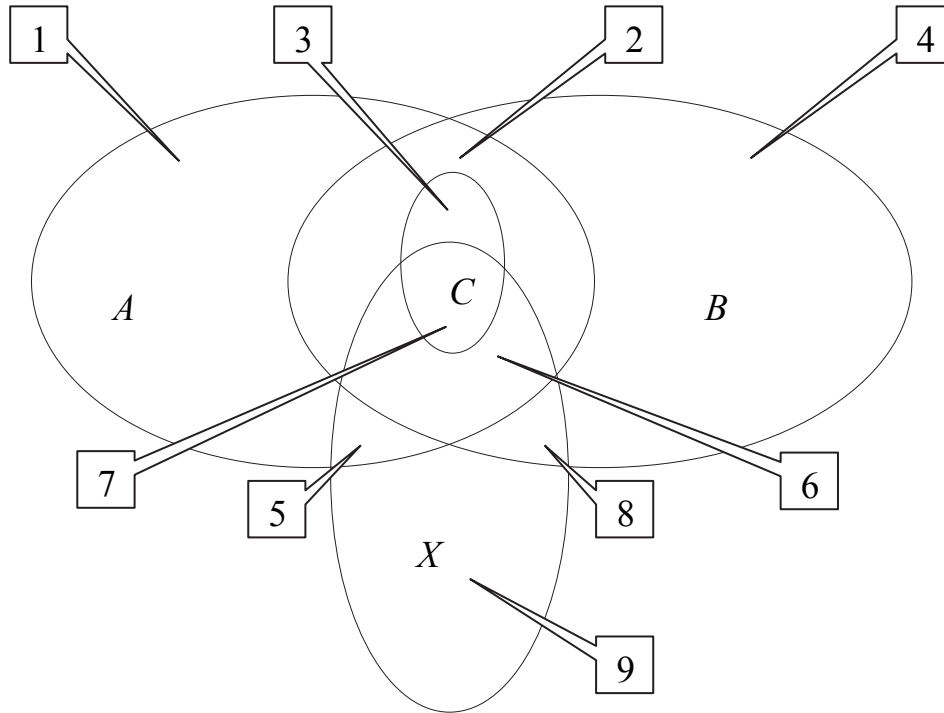


Рисунок 1.2 – Множества A, B, C, X находятся в общем положении

С другой стороны, легко проверить, что $X = B$ является решением заданной системы. Если $C = \emptyset$ и $B \subseteq A$, то $C \subseteq A \cap B$. Пусть, например, $B = \{b\}$, $A = \{a, b\}$, где a, b – списки элементов. Пусть $X = B = \{b\}$, тогда $C \Delta B = B \setminus C = \{b\}$, $X \setminus C = X = \{b\}$, $A \setminus X = \{a\}$, $C \cap X = \emptyset = A \cap B$. Таким образом, все соотношения системы удовлетворяются, т.е. множество $X = B$ является решением исходной системы при выполнении условий $B \subseteq A$, $C = \emptyset$.

Задача 1.1.10. Пусть $B \subseteq A \subseteq C$. Найдите множество X , удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C. \end{cases}$$

Решение. Из первого соотношения следует, что $B \subseteq X$, следовательно, это множество можно представить в виде $X = B \cup X'$, причем $B \cap X' = \emptyset$. Рассмотрим

$$A \cap X = A \cap (B \cup X') = \underbrace{A \cap B}_{B \subseteq A} \cup A \cap X' = B \cup A \cap X'.$$

По условию полученное выражение равно B , но тогда $A \cap X' = \emptyset$. Подставим $X = B \cup X'$ во второе уравнение системы

$$A \cup X = A \cup (B \cup X') = (A \cup B) \cup X' \stackrel{B \subseteq A}{=} A \cup X' = C.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} A \subseteq C \\ A \cap X' = \emptyset, \end{cases}$$

откуда можно заключить, что $X' = C \setminus A$. Окончательно, $X = B \cup (C \setminus A)$.

Задачи и упражнения

1. Перечислите элементы множеств

а) $\{x : x - \text{гласная буква}\};$

б) $\{x : x - \text{положительное четное целое число, меньшее } 2\};$

в) $\{x : x - \text{целое и } x^2 < 100\};$

г) $\{x : x \in \mathbb{Z} \text{ и } 6x^2 + x - 1 = 0\};$

д) $\{x : x \in \mathbb{R} \text{ и } 6x^2 + x - 1 = 0\}.$

2. Опишите следующие множества с помощью характеристического свойства:

а) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\};$

б) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\};$

в) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\};$

г) $\{2, 5, 8, 11, \dots\};$

д) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\};$

д) $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right\}.$

3. Установите истинность или ложность каждого из следующих утверждений:

- а) $\emptyset \subseteq \emptyset, \emptyset \subset \emptyset, \emptyset \in \emptyset, \emptyset \subseteq A, \emptyset \in A$ (A – произвольное множество);
- б) $\{2\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- в) $\emptyset = \{\emptyset\}$.

4. Определите булеан $\beta(A)$ множества A , если

- а) $A = \{a, b, c\}$; б) $A = \{\{a, b, c\}\}$; в) $A = \{a, \{b, c\}\}$.

5. Определите $\beta(A)$, если

- а) $A = \{a, b, c\}$; б) $A = \{\{a, b, c\}\}$; в) $A = \{a, \{b, c\}\}$.

6. Определите $\beta(\beta(A))$, если

- а) $A = \emptyset$; б) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; в) $A = \{0, 1\}$.

7. Докажите, что для любых множеств A_1, A_2, \dots, A_n , таких что $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_1$, справедливо $A_1 = A_2 = \dots = A_n$.

8. Наследником множества A называется множество $A \cup \{A\}$.

Определите наследников следующих множеств:

- а) \emptyset , б) $\{\emptyset\}$, в) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

9. Пусть заданы следующие подмножества целых чисел

$$A = \{3n : n \in \mathbb{Z} \text{ и } n \geq 4\}, \quad A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}, \quad A = \{n : n \in \mathbb{Z} \text{ и } n^2 \leq 100\}.$$

С помощью операций над множествами выразите следующие множества через A, B, C :

- а) $\{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$;
- б) $\{6n : n \in \mathbb{Z} \text{ и } n \geq 2\}$;
- в) $\{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$.

10. Пусть на универсальном множестве $U = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$ заданы подмножества $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{r, t, v\}$, $C = \{p, s, t, u\}$. Найдите элементы следующих множеств:

$$B \cap C, \quad A \cup C, \quad \overline{A \cup B}, \quad B \Delta C, \quad (A \cup B) \cap (A \setminus C), \quad \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}.$$