

УДК 517.3  
ББК 22.193  
У68

Рецензенты:

профессор *Смолин Ю.Н.* (Магнитогорский государственный университет),  
кафедра дифференциальных уравнений Башкирского государственного  
университета

У68            Уравнения математической физики : теория и практика [Электронный  
ресурс] : учеб. пособие / сост. В.Г. Абдрахманов, Г.Т. Булгакова. — М. :  
ФЛИНТА, 2014. — 338 с.

ISBN 978-5-9765-1988-6

Предлагаемое учебное пособие, содержащее теорию и задачи, предназначено  
для студентов технических вузов и может служить методическим обеспечением  
спецкурса по уравнениям математической физики. Приведены подробные решения  
типовых задач, поэтому пособие может быть полезным при самостоятельном  
изучении курса.

УДК 517.3  
ББК 22.193

ISBN 978-5-9765-1988-6

© В.Г. Абдрахманов,  
Г.Т. Булгакова, 2014

© Издательство «ФЛИНТА», 2014

## Оглавление

Предисловие	6
Глава 1. Предварительные сведения из математического анализа и теории линейных дифференциальных уравнений	7
1.1. Свойства граней числовых множеств в $R$	7
1.2. Точечные множества в $R^n$	8
1.3. Некоторые свойства пределов, непрерывных функций, интегралов	12
1.4. Равномерно сходящиеся функциональные ряды	20
1.5. Интегралы, зависящие от параметров	21
1.6. Несобственные интегралы, зависящие от параметров	27
1.7. Нормированные пространства	38
1.8. Нормированное пространство $C[a,b]$	40
1.9. Евклидовы пространства	43
1.10. Евклидово пространство $L_p^2[a,b]$	47
1.11. Линейные операторы в евклидовом пространстве	53
1.12. Оператор Штурма-Лиувилля	56
1.13. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Штурма-Лиувилля	61
1.14. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных. Классификация линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными	74
Глава 2. Примеры постановки задач математической физики	80
2.1. От физического явления – к математической модели	80
2.2. Волновое уравнение (уравнение гиперболического типа)	81
2.3. Уравнение теплопроводности	89
2.4. Уравнение Лапласа. Задача Дирихле	95
2.5. Корректность постановки задач	96
Глава 3. Одномерная задача Коши	97
3.1. Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения	97
3.2. Примеры	104
3.3. Решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с одним краевым условием: полубесконечная струна	109
3.4. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности	116
3.5. Пример	136
3.6. Решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности с одним краевым условием: полубесконечный стержень	138
Глава 4. Одномерная смешанная задача	142
4.1. Решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения	142
4.2. Примеры	162
4.3. Физический смысл решения смешанной задачи для свободных колебаний струны с закрепленными концами: стоячие волны	173
4.4. Решение смешанной задачи для одномерного уравнения	

теплопроводности	176
4.5. Примеры	185
Глава 5. Примеры двумерных и трехмерных смешанных задач, приводящихся к одномерным	196
5.1. Ортогональная система функций, порожденная функцией Бесселя	196
5.2. Теорема (об операторе Лапласа в полярных координатах)	203
5.3. Свободные колебания круглой мембраны	204
5.4. Свободные радиальные колебания в однородном шаре с непроницаемой поверхностью	208
5.5. Распределение температуры в круглой пластинке	211
5.6. Распределение температуры в шаре	212
Глава 6. Двумерная задача Дирихле	215
6.1. Решение задачи Дирихле	215
6.2. Примеры	220
Глава 7. Простейшие трехмерные задачи Дирихле	230
7.1. Ортогональная система полиномов Лежандра	230
7.2. Примеры	238
Глава 8. Задачи	242
8.1. Задача Штурма-Лиувилля	242
8.2. Задача Коши для одномерного волнового уравнения	245
8.3. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с одним краевым условием: полубесконечная струна	258
8.4. Задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности	261
8.5. Смешанная задача для однородного уравнения теплопроводности с одним краевым условием: полу-бесконечный стержень	264
8.6. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения	267
8.7. Смешанная задача для одномерного уравнения теплопроводности	280
8.8. Смешанная задача для двумерного волнового уравнения: колебания круглой мембраны	287
8.9. Смешанная задача для трехмерного волнового уравнения: колебания в шаре	289
8.10. Смешанная задача для двумерного уравнения теплопроводности: распределение температуры в круглой пластинке	290
8.11. Смешанная задача для трехмерного уравнения теплопроводности: распределение температуры в шаре	291
8.12. Краевая задача для уравнения эллиптического типа	293
8.13. Дополнительные задачи	305
Глава 9. Лабораторная работа	324
Приложение. Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными с линейной главной частью к каноническому виду	330
1. Преобразование уравнения с помощью замены переменных	330

2. Приведение уравнения с двумя независимыми переменными к каноническому виду	332
Список литературы	342